Annales des Concours

PC
Mathématiques · Informatique
2022

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

William Aufort
professeur en CPGE

Antoine Barrier
ENS Paris-Saclay

Pierre Bosch
professeur en CPGE

Céline Chevalier
enseignant-chercheur à l'université

Thierry Limoges
professeur en CPGE

Florian Metzger
professeur en CPGE

David Michel
professeur agrégé

Tristan Poullaouec
professeur en CPGE

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2022

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités	Informatique tronc commun
e3a MP Maths (2021+2022)		••	••	••	••	•	••	•	•	••	••	•		••	
e3a PC Maths (2021+2022)			••	•	••		•	•			••			•	
e3a PSI Maths (2021+2022)		••	•	••			•		••		••	••		••	
CCINP MP Maths 1	•	••	•		•	•	••••	••••••••	••••	••••	•••••••		•	••••••	•••
CCINP MP Maths 2	•••	•••••	••••••	••••••••	••••••	•••	•	•			•	•	•	•	•••
CCINP PC Maths		••••	•••	••••	••	••		••	•••		••••••	•	•	•••••••	
CCINP PSI Maths			•••••	••••••	••	•	•••	••	••••	••••	•••••	••••	•	•••	
Centrale MP Maths 1	••	••	•••••	••••••	••	•••	••	•	•	••	••	•		••	
Centrale MP Maths 2		••	•••	•	•	••	••••	••••	•••	•••	••••••	••	••	••••	
Centrale PC Maths 1	•	••	••••	•••••	••••				••••		••	•	•	•••••	
Centrale PC Maths 2	•	•••	•		•		••	•••••	••••	•••	•••••			••••	
Centrale PSI Maths 1		••	•••••	•••••	•	••	•••	••	•	••		•	•	•••••••	••
Centrale PSI Maths 2		••	•••	•			••	••	••••	•••	•••••	•••	•	•••••	
Mines MP Maths 1	•	•	•••	•••	••	•	••••	••	•••	•••	•••	••		••••••	
Mines MP Maths 2	•	••••	••••	•••	•••	••••	••••	••••	•	•••	•••	••	••	••	
Mines PC Maths 1		•	•••	•			•••	••	•••	••••	••	•		••••••	
Mines PC Maths 2		•••	••	•	•	•	••	•	••	•••	•••••	••	•	•	
Mines PSI Maths 1			•••	•			••	••	•••	••••	••	•		••••••	
Mines PSI Maths 2		•••	•••••	••••	••	••	•	•		•••	•••	••		•	
X/ENS MP Maths A	•••	•••••	•••••••	••••••	•••	•••••	••		••	•••					
X/ENS MP Maths B	••	••			••	••	••••	••••	•••	•••••••	••••••	•	•	••••	
X/ENS PC Maths		••	•••	••••	••	•••				••••	••••		••	•••	
X/ENS PSI Maths		•••	••••	•	•••	•••	•	•	•	•••••	•	•	•		

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2022 **PC8M**

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**
   - **1.1.** Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   - **1.2.** Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
   - **1.3.** Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. **Calcul de la somme de cette série**
   - **2.1.** Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   - **2.2.** En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.
   - **2.3. Intégration terme à terme ?**
     - **2.3.1.** Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!],\ f(e_j) = e_1 + e_j \right) \quad \text{et} \quad (g = f - \mathrm{id}_{E_n}).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}\,G\,P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, .., 0)$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1}.

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}\,F\,P$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = F\,X(t) + t\,U$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$.

2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, x > 0,\ \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)t}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$.

e3a Mathématiques PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants couvrant une bonne partie du programme des première et deuxième années : probabilités et variables aléatoires, suites, séries, intégration, algèbre linéaire, espaces euclidiens.

- Dans l'exercice 1, on étudie une variable aléatoire modélisant la probabilité qu'un sauteur franchisse successivement des barres de plus en plus haut. C'est l'occasion de mener plusieurs calculs de sommes de séries.
- L'exercice 2 utilise un développement en série entière pour calculer la somme de la série alternée des intégrales de Wallis
$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$$
C'est un cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas.
- L'exercice 3 porte sur l'étude de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par
$$g(e_1) = \sum_{i=2}^{n} e_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![2\,;n]\!] \qquad g(e_i) = e_1$$
On détermine ses éléments propres, une base de son noyau, et son image. Cette partie se finit par la résolution du système différentiel
$$\mathrm{X}' = (\mathrm{G} + \mathrm{I}_n)\mathrm{X} + t\mathrm{U}$$
où G est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et U un vecteur propre de g pour son unique valeur propre.
- Le dernier exercice propose de montrer l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
après avoir montré la convergence de l'intégrale.

Ce sujet est complet et proche du cours, sans difficulté technique et extrêmement guidé. Il est parfait pour travailler ou réviser les fondamentaux.

Indications

Exercice 1

I.3 Il y a deux informations données par l'énoncé : d'une part, X est une variable aléatoire *réelle*, d'autre part, pour $\omega \in \Omega$ (univers), $\mathrm{X}(\omega)$ est un numéro de saut.

I.4 L'énoncé semble indiquer que le sauteur s'arrête au premier échec, et qu'il échoue à un moment. Utiliser la formule des probabilités composées.

I.5 Le sauteur doit franchir toutes les hauteurs précédentes.

I.8 Écrire le terme de la série de façon télescopique et utiliser le développement en série de l'exponentielle.

Exercice 2

II.1.1 Remarquer que $\cos t \in [\,0\,;1\,]$ pour tout $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

II.1.2 Penser au théorème de convergence dominée.

II.2.3.1 Faire une intégration par parties sur $|u_{n+2}|$ en utilisant $\cos^2 = 1-\sin^2$.

II.2.3.3 Que dire de la série $\sum \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$?

Exercice 3

III.2 Que dire des matrices F et G ?

III.3 Utiliser la trace.

III.3.4.2.(i) Diagonaliser g.

III.3.5 Remarquer que la condition d'ordre des valeurs propres requise demande que la 1re colonne soit un vecteur propre pour λ_1.

III.4 Utiliser la réduction de F pour se ramener à des équations différentielles scalaires.

Exercice 4

IV.1.1 Utiliser la limite de référence $\lim\limits_{0} (\sin t)/t$.

IV.1.2 Penser aux intégrales de Riemann.

IV.1.4 Appliquer un théorème du cours en remarquant que f est une intégrale à paramètre. On raisonnera sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

IV.2.1.1 Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

IV.2.2 Même indication que pour IV.1.4.

IV.3.3 Penser à utiliser le résultat de la question IV.3.2.

IV.4.1, IV.4.2 Utiliser le théorème d'encadrement et les questions IV.2.1.

IV.4.3 Primitiver deux fois en n'oubliant pas la constante !

IV.5 Montrer que l'intégrale à calculer est la limite en 0 de f, puis utiliser les résultats des questions IV.1.4 et IV.4.2.

Exercice 1

I.1.1 D'après le cours, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})}$$

I.1.2 D'après le cours, le développement en série entière au voisinage de 0 de exp est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

I.1.3 Puisque X est un numéro de saut s'il existe, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. L'énoncé semble indiquer que le sauteur s'arrête au premier échec même si ça n'est pas très clair. Il semble aussi faire l'hypothèse que le sauteur échoue à un moment presque sûrement, mais ce ne sera prouvé qu'en question I.8. En effet, aucun saut n'est un échec certain vu que pour tout entier n, $0 < p_n < 1$. De plus, aucun autre saut que le premier n'est une réussite certaine pour la même raison, donc X prend des valeurs entières arbitrairement grandes et ne « saute » aucune valeur entière. On a donc, directement par le modèle décrit,

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

I.1.4 L'événement $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$ signifie que le sauteur réussit le premier saut puis échoue. D'après la formule des probabilités composées

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2} \mid S_1) = \mathbb{P}(S_1)(1 - \mathbb{P}(S_2 \mid S_1)) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

I.1.5 L'événement $[X = 2]$ signifie que le sauteur réussit le premier saut, puis le deuxième, puis échoue, soit

$$\boxed{[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}}$$

D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1]) &= \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(S_2 \mid S_1)\,\mathbb{P}(\overline{S_3} \mid S_1 \cap S_2)\\ &= \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(S_2 \mid S_1)(1 - \mathbb{P}(S_3 \mid S_1 \cap S_2))\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$$

I.1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X = n]$ signifie que le sauteur réussit les n premiers sauts puis échoue, soit

$$\boxed{[X = n] = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}}$$

I.1.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées et avec le résultat de la question I.1.6 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}(S_1)\left(\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(S_k \mid S_1 \cap \cdots \cap S_{k-1})\right) \times \mathbb{P}(\overline{S_{n+1}} \mid S_1 \cap \cdots \cap S_n)) \\
&= \mathbb{P}(S_1)\left(\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(S_k \mid S_1 \cap \cdots \cap S_{k-1})\right) \times (1 - \mathbb{P}(S_{n+1} \mid S_1 \cap \cdots \cap S_n)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}([X = n]) = \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right) \times (1 - p_{n+1}) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}$$

d'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}([X = n]) = \frac{n}{(n+1)!}}$$

I.1.8 D'après la question I.1.7 et les croissances comparées on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}([X = n]) = \frac{n}{(n+1)!} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente d'après le critère de Riemann, donc la série $\sum \mathbb{P}([X = n])$ converge absolument par comparaison. De plus, par télescopage on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \lim \frac{1}{(n+1)!} = 1}$$

> Ce résultat qui était attendu est rassurant : l'hypothèse que l'on peut considérer une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si vous êtes courageux, vous pouvez chercher à montrer qu'en modifiant le taux de succès au n-ième saut, la conclusion précédente est valide si et seulement si la série $\sum p_n$, qui est à termes dans $]\,0\,;1\,]$, est une série divergente.

I.1.9 D'après la question I.1.7 on a

$$n\,\mathbb{P}([X = n]) = \frac{n^2}{(n+1)!} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le critère de Riemann montre donc que $\sum n\,\mathbb{P}([X = n])$ converge absolument, d'où

$$\boxed{\text{La variable aléatoire X admet une espérance.}}$$

Cette espérance s'obtient en reprenant les calculs de la question I.1.8 et en utilisant la convergence de la série $\sum 1/n!$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}([X = n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) && \text{(linéarité)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 && \text{(changement d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = e - 1} \qquad \text{(question 1.2)}$$

CCINP Maths PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet comporte trois exercices indépendants.

- Dans le premier, on considère des endomorphismes de $\mathbb{C}_n[X]$ définis de la manière suivante : étant donné $A \in \mathbb{C}_n[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$, on note φ l'application qui à $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. On étudie d'abord deux exemples dans le cas $n = 2$. Ensuite, dans le cas où B est scindé à racines simples, on montre que φ est diagonalisable et admet une base de vecteurs propres constituée de polynômes de Lagrange.
- Le deuxième exercice étudie une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On s'intéresse aux séries de résultats identiques, et plus précisément à la longueur de la première série puis au nombre de séries distinctes obtenues lors des n premiers lancers.
- Le dernier exercice, enfin, traite de la constante d'Euler-MacLaurin. Après avoir démontré son existence, on en établit une expression intégrale à l'aide d'une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers la fonction $t \longmapsto e^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Ces exercices ne posent pas de difficultés particulières : les questions sont précises et très détaillées, le candidat était pris en main et conduit vers le résultat. On retrouve beaucoup d'applications directes du cours et de grands classiques. De plus, le sujet est d'une longueur plus que raisonnable, si bien qu'un candidat maîtrisant son cours pouvait le traiter dans le temps imparti. Attention, il était indispensable de soigner la rédaction et la précision des justifications, qui sont primordiales ici puisque beaucoup de résultats sont donnés dans l'énoncé.

Indications

Exercice 1

1 Que dire du degré de $\varphi(\mathrm{P})$?

3 Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes A, AX et AX^2 par B.

6 Procéder comme à la question 3.

7 Pour l'implication directe, noter que φ ne possède qu'une seule valeur propre et en déduire sa matrice dans une base de diagonalisation.

9 Comparer le nombre de racines du polynôme D à son degré en utilisant le résultat de la question 8.

11 Écrire la division euclidienne de AL_k par B et appliquer la relation obtenue à x_j.

13 Utiliser les résultats des questions 10 et 12.

Exercice 2

15 Dériver la série entière précédente sur son disque ouvert de convergence.

18 Noter que L_1 est une variable aléatoire de support $\mathbb{N}$.

19 Utiliser les résultats des questions 17 et 15.

21 Après avoir repéré les valeurs extrêmes de N_n, construire des résultats permettant d'obtenir toutes les valeurs intermédiaires.

23 Appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\mathrm{P}_n, \mathrm{F}_n)$.

25 Quelle est la nature de la suite $\big(\mathrm{G}_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

26 Utiliser le résultat de la question 25.

Exercice 3

30 Se servir de la série télescopique étudiée à la question précédente.

33 Penser à utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ fournie par l'énoncé.

34 Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

35 Utiliser les résultats des questions 33 et 34.

36 Appliquer le théorème de convergence dominée, en se servant des résultats des questions 32, 33 et 34.

37 Effectuer une intégration par parties.

38 Calculer l'intégrale I_n à l'aide du changement de variables $u = 1 - t/n$.

39 Utiliser les résultats des questions 37 et 38.

Exercice 1

1 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Le polynôme $\varphi(\mathrm{P})$ étant le reste de la division euclidienne de AP par B, on a $\varphi(\mathrm{P}) = 0$ ou bien $\deg(\varphi(\mathrm{P})) < \deg(\mathrm{B}) = n+1$ soit $\deg(\varphi(\mathrm{P})) \leqslant n$. Dans tous les cas, $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Ceci prouve que

$$\boxed{\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \qquad \varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]}$$

> L'auteur du sujet a choisi de ne pas utiliser la convention $\deg(0) = -\infty$ et de restreindre les calculs de degré aux polynômes non nuls.

2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $\mathrm{AP}_1 = \mathrm{BQ}_1 + \mathrm{R}_1$ et $\mathrm{AP}_2 = \mathrm{BQ}_2 + \mathrm{R}_2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2) &= \mathrm{AP}_1 + \lambda \mathrm{AP}_2 \\
&= \mathrm{BQ}_1 + \mathrm{R}_1 + \lambda(\mathrm{BQ}_2 + \mathrm{R}_2) \\
&= \mathrm{B}(\mathrm{Q}_1 + \lambda \mathrm{Q}_2) + (\mathrm{R}_1 + \lambda \mathrm{R}_2) \\
\mathrm{A}(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2) &= \mathrm{BQ} + \mathrm{R}
\end{aligned}$$

en notant $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 + \lambda \mathrm{Q}_2$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 + \lambda \mathrm{R}_2$. De plus, $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{R} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ puisque $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, donc stables par combinaisons linéaires. Par conséquent, $\mathrm{R} = 0$ ou $\deg(\mathrm{R}) < n+1 = \deg(\mathrm{B})$, ce qui prouve que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $\mathrm{A}(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2)$ par B. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{C}\text{, le quotient et le reste de la division euclidienne} \\ \text{de } \mathrm{A}(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2) \text{ par B sont } \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 + \lambda \mathrm{Q}_2 \text{ et } \mathrm{R} = \mathrm{R}_1 + \lambda \mathrm{R}_2.\end{array}}$$

Or, $\varphi(\mathrm{P}_1) = \mathrm{R}_1$ et $\varphi(\mathrm{P}_2) = \mathrm{R}_2$ par définition de ces polynômes. De ce fait,

$$\forall\, (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]^2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \qquad \varphi(\mathrm{P}_1 + \lambda \mathrm{P}_2) = \varphi(\mathrm{P}_1) + \lambda \varphi(\mathrm{P}_2)$$

si bien que φ est une application linéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ d'après la question précédente,

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[\mathrm{X}].}$$

3 Il faut calculer $\varphi(1)$, $\varphi(\mathrm{X})$ et $\varphi(\mathrm{X}^2)$. Nous allons pour cela effectuer les divisions euclidiennes de A, AX et AX^2 par B.

- $\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = (\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1) \times 0 + \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}$

  donc $\qquad \varphi(1) = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = 0 \times 1 + 2 \times \mathrm{X} + 1 \times \mathrm{X}^2$

- $\mathrm{AX} = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1) \times 1 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$

  donc $\qquad \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 = 1 \times 1 + 1 \times \mathrm{X} + 1 \times \mathrm{X}^2$

- $\mathrm{AX}^2 = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 = (\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1) \times (\mathrm{X} + 1) + 2\mathrm{X} + 1$

  donc $\qquad \varphi(\mathrm{X}^2) = 2\mathrm{X} + 1 = 1 \times 1 + 2 \times \mathrm{X} + 0 \times \mathrm{X}^2$

En écrivant les coordonnées des polynômes $\varphi(1)$, $\varphi(\mathrm{X})$ et $\varphi(\mathrm{X}^2)$ dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ en colonnes, on obtient la matrice de φ dans cette base. Il en découle que

$$\boxed{\text{La matrice de } \varphi \text{ dans la base } (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2) \text{ est } \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot}$$

4 Commençons par calculer le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{M}-\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3) &= \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 1 \\ 2 & 1-\mathrm{X} & 2 \\ 1 & 1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 1 \\ 2 & 1-\mathrm{X} & 2 \\ 1+\mathrm{X} & 0 & -(1+\mathrm{X}) \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1) \\
&= (1+\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 1 \\ 2 & 1-\mathrm{X} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1+\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 1-\mathrm{X} \\ 2 & 1-\mathrm{X} & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{C}_3 \leftarrow \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1) \\
&= (1+\mathrm{X}) \begin{vmatrix} 1 & 1-\mathrm{X} \\ 1-\mathrm{X} & 4 \end{vmatrix} \text{(développement selon } \mathrm{L}_3) \\
&= (1+\mathrm{X})\left(4-(1-\mathrm{X})^2\right) \\
&= (1+\mathrm{X})(2+1-\mathrm{X})(2-1+\mathrm{X}) \\
\det(\mathrm{M}-\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3) &= (\mathrm{X}+1)^2(3-\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Ce polynôme étant scindé, on en déduit aisément que

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de M sont } -1 \text{ et } 3, \text{ de multiplicités respectives 2 et 1.}}$$

> Ceci est cohérent avec la trace de la matrice, qui vaut
>
> $$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 1 = 2 \times (-1) + 3$$

Déterminons maintenant le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 : pour tout vecteur $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{MX} = -\mathrm{X} &\iff \begin{cases} y + z = -x \\ 2x + y + 2z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \\
&\iff x + y + z = 0 \\
&\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\
\mathrm{MX} = -\mathrm{X} &\iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y, z \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Par conséquent, le sous-espace propre associé à -1 est

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M}+\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}}$$

La famille $\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}$ est de plus une base de ce sous-espace car elle est génératrice et constituée de vecteurs non colinéaires.

Centrale Maths 1 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Florian Metzger (professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce problème traite de la maximisation de la variance d'une variable aléatoire donnée sous la forme $\mathrm{U}^\top \mathrm{Y}$, où Y est un vecteur aléatoire fixé. Ce sujet est à la base de la méthode d'*analyse par composantes principales*. C'est une méthode « factorielle » d'analyse des données (théorie mathématique à la base de l'apprentissage automatique et de l'intelligence artificielle), dite « par réduction des dimensions ». L'objectif est de partir des données quantitatives brutes (visualisées comme un tableau à double entrée individus / variables) et de les transformer afin de pouvoir les visualiser dans un espace de petite dimension (idéalement 2 ou 3) en perdant le minimum d'information. Pour cela, l'idée est de construire, à partir des variables liées entre elles (on dit qu'elles sont corrélées), de nouvelles variables, appelées *composantes principales*, en nombre inférieur et décorrélées, et concentrant le maximum d'information (c'est-à-dire de variance maximale).

- La première partie démontre plusieurs propriétés des matrices symétriques réelles, en particulier liées à leur rayon spectral, c'est-à-dire au maximum des modules de leurs valeurs propres. C'est une partie tout à fait classique, à savoir traiter sans hésitation.
- La deuxième partie introduit la notion de vecteur aléatoire ainsi que des quantités associées : vecteur espérance et matrice de covariance. Elle mélange algèbre linéaire et probabilités, et ne présente pas de difficulté particulière si ce n'est que l'on travaille sur des vecteurs au lieu de variables aléatoires. Toutes les notions sont clairement définies dans l'énoncé.
- Enfin, dans la troisième partie, on cherche un vecteur unitaire U_0 qui maximise la variance de ${\mathrm{U}_0}^\top \mathrm{Y}$ où Y est un vecteur aléatoire donné, puis un vecteur unitaire U_1 qui maximise la variance de ${\mathrm{U}_1}^\top \mathrm{Y}$ tout en étant orthogonal à U_0. Sans que la suite de la technique soit présentée dans l'énoncé, ce sont les deux premières étapes de la méthode d'analyse par composantes principales.

En conclusion, ce sujet parvient à introduire des notions originales tout en restant abordable avec les notions du programme de PC. Il ne présente pas de grande difficulté et sera utile à tout étudiant souhaitant réviser les bases de l'algèbre linéaire et des probabilités dans un cadre inhabituel.

Indications

Partie I

2 Effectuer la somme des première et troisième colonnes de la matrice A_1.

3 Ne pas hésiter à anticiper la réponse à la question suivante en cherchant un deuxième vecteur propre orthogonal au premier. Obtenir la deuxième valeur propre de A_1 grâce à la trace de A_1 (qui est égale à la somme de ses valeurs propres).

4 On peut utiliser l'orthogonalité des sous-espaces propres de A_1 pour déterminer un vecteur propre associé à sa deuxième valeur propre.

8 Calculer de deux façons différentes $U^\top HU$.

9 Montrer que 0 est la seule valeur propre de A.

10 Remarquer que C est une sphère de centre 0 et de rayon 1.

11 L'application donnée est continue sur une partie fermée bornée.

12 Considérer une valeur propre λ telle que $\rho(A) = |\lambda|$ et un vecteur propre unitaire associé.

13 L'inégalité $\rho(A) \leqslant \max\limits_{U\in C} \left|U^\top AU\right|$ est prouvée par le résultat de la question 12. Pour l'inégalité inverse, calculer $U^\top AU$ en posant $V = P^\top U$ et en remarquant que $V \in C$.

Partie II

16 Raisonner sur les coefficients de Σ_Y et exploiter les propriétés de la covariance.

17 Raisonner sur les variables Z_i pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$.

18 Orthodiagonaliser la matrice Σ_Y et utiliser la question 17.

20 Remarquer que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{V}(X_i) = (\Sigma_X)_{i,i}$.

21 Montrer l'existence de variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ telles que les covariances aient les valeurs souhaitées.

22 Orthodiagonaliser la matrice A puis appliquer les questions 21 et 17.

25 Montrer tout d'abord qu'ils sont orthogonaux, puis qu'ils sont en somme directe et utiliser le théorème du rang pour conclure.

26 Appliquer la question 23 avec $U = V_j$, puis la question 16 avec $U = \mathbb{E}(Y)$.

27 Montrer que l'espérance de la variable considérée est nulle et conclure à l'aide de la question 26.

28 Utiliser les questions 25 puis 27.

Partie III

29 Appliquer la question 21.

30 Utiliser les questions 23 puis 14.

31 C'est une conséquence des questions 19, 14, 11 et 12.

32 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

33 Le rang de la matrice J vaut 1 et la somme de ses colonnes vaut $\begin{pmatrix} n & \ldots & n \end{pmatrix}^\top$.

34 Utiliser les questions 31, 32 et 33 et considérer une base commune de vecteurs propres de J et I_n afin de déterminer les valeurs propres de Σ_Y.

37 Considérer une base orthonormée de vecteurs propres de Σ_Y associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On peut prendre son premier vecteur égal à U_0. Décomposer ensuite $U \in C'$ selon cette base et calculer $q_Y(U)$ par linéarité.

I. Généralités sur les matrices symétriques réelles

1 D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable. Réciproquement, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$. Comme la matrice D est diagonale, elle est symétrique, donc $D^\top = D$. Il vient

$$A^\top = (PDP^\top)^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A$$

Finalement, $\boxed{\text{Une matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthodiagonalisable si, et seulement si, elle est symétrique.}}$

2 Remarquons que la somme des première et troisième colonnes de A_1 vaut

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}^\top = 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A_1 \text{ associé à la valeur propre } \lambda_1 = 7.}$$

3 Calculons $\qquad A_1 - \lambda_1 I_3 = A_1 - 7I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

La matrice $A_1 - \lambda_1 I_3$ est de rang 1 car tous ses vecteurs colonnes sont colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$. D'après le théorème du rang, le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 est donc de dimension 2 et c'est le plan d'équation cartésienne $2x + y - 2z = 0$. D'après la question 2, on peut prendre comme premier vecteur propre $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$ (il correspond à $x = 1$ et $y = 0$).

Pour le deuxième vecteur propre, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^\top$ (à l'aide de $x = 1$ et $z = 0$). Mais comme la question 4 demande d'orthodiagonaliser A_1, autant prendre directement un vecteur X_2 orthogonal à X_1, c'est-à-dire tel que $(X_1 \mid X_2) = 0$. Pour cela, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y = -4x \\ z = -x \end{cases}$$

qui mène par exemple à $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^\top$ (avec $x = -1$, qui implique $y = 4$ et $z = 1$). La famille (X_1, X_2) est bien une base de l'espace propre E_{λ_1} car c'est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls dans un espace de dimension 2. Ainsi,

$$\boxed{E_{\lambda_1}(A_1) = \text{Vect}\,(X_1, X_2) \qquad \text{avec} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Comme la matrice A_1 est diagonalisable, la somme de ses valeurs propres est égale à sa trace, donc, en notant λ_2 la seconde valeur propre de A_1,

$$\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}\,(A_1) = 3 + 6 + 3 = 12$$

Comme $\lambda_1 = 7$, on en déduit que $\lambda_2 = -2$. Par suite,

$$\boxed{\text{sp}\,(A_1) = \{-2, 7\}}$$

4 La matrice A_1 est symétrique réelle. Elle est donc orthodiagonalisable d'après la question 1. La question 3 affirme que $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$ et que les sous-espaces propres associés sont de dimension respective 2 et 1. Comme les sous-espaces propres de A_1 sont orthogonaux, on peut chercher un vecteur propre $X_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$ associé à la valeur propre λ_2 en résolvant le système

$$\begin{cases} 0 = (X_1 \mid X_3) = x + z \\ 0 = (X_2 \mid X_3) = -x + 4y + z \end{cases} \qquad \text{qui s'écrit} \qquad \begin{cases} 0 = x + z \\ 0 = 4y + 2z \end{cases}$$

En prenant $y = 1$, on obtient le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$.

> On pouvait aussi déterminer un vecteur propre X_3 associé à la valeur propre λ_2 de deux autres manières. D'abord, en exploitant l'orthogonalité des sous-espaces propres comme ci-dessus, on pouvait calculer directement le produit vectoriel entre X_1 et X_2 :
>
> $$X_3 = X_1 \wedge X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
>
> Sinon, on pouvait aussi calculer
>
> $$A_1 - \lambda_2 I_3 = A_1 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
>
> et chercher les vecteurs propres de A_1 associés à λ_2 en résolvant le système
>
> $$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 8y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

On dispose donc d'une base orthogonale de vecteurs propres (X_1, X_2, X_3). Il reste à normer ces trois vecteurs pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres, en calculant

$$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \|X_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

et

$$\|X_3\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$$

Il vient

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 3 & 1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_1 = PDP^\top \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 3 & 1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

5 Montrons que l'application ϕ est bilinéaire symétrique définie positive. Considérons $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- L'application ϕ est symétrique puisque

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt = \int_0^1 Q(t)P(t)\,dt = \phi(Q, P)$$

Centrale Maths 2 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Michel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de l'approximation de fonctions régulières par des polynômes interpolateurs de Lagrange et de la convergence d'une telle approximation lorsque le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini. Les parties I, II et III sont presque indépendantes, la partie I étant utilisée pour répondre à une question de la partie II, cette dernière étant nécessaire pour traiter une question de la partie III.

- La première partie du sujet porte sur deux familles de polynômes classiques : les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev. On étudie d'abord les propriétés des premiers dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour un produit scalaire bien choisi. Par la suite, on vérifie que le n-ième polynôme de Tchebychev (de première espèce) est de degré n et a pour coefficient dominant 2^{n-1} et on détermine sa factorisation. On applique ces résultats à l'étude d'une inégalité.
- Dans la deuxième partie, on donne une estimation de l'erreur commise en approchant une fonction régulière par un polynôme interpolateur de Lagrange. On démontre ensuite la convergence uniforme vers 0 de cette erreur lorsque le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini dans des cas particuliers. On montre enfin que l'on peut affaiblir légèrement ces contraintes en choisissant convenablement les points d'interpolation.
- Enfin, on met en évidence dans la troisième partie les limites de l'interpolation d'une fonction rationnelle en des points équidistants. Pour un tel choix de points d'interpolation, en interprétant l'erreur commise en approchant la fonction par la suite des polynômes interpolateurs à l'aide d'une somme de Riemann, on montre que l'erreur diverge vers $+\infty$.

Pour réussir cette épreuve, il fallait être très à l'aise avec les polynômes. La première moitié du sujet, jusqu'à la question 18, peut être abordée dès la première année grâce à l'étude des polynômes, quelques raisonnements d'analyse mettant en œuvre les théorèmes des valeurs intermédiaires et de Rolle, ainsi que les notions élémentaires sur les espaces euclidiens. S'il est question de convergence uniforme dans la partie II, on n'a besoin que d'en connaître la définition. On majore les dérivées n-ièmes de certaines fonctions, dont la somme d'une série entière. On calcule également une intégrale généralisée ainsi qu'une somme de Riemann. Les résultats obtenus sont plutôt classiques et une grande partie d'entre eux auront déjà été abordés en classe par de nombreux candidats.

Indications

Partie I

1 Le seul polynôme de degré strictement inférieur à n ayant au moins n racines distinctes est le polynôme nul.

3 Utiliser le résultat de la question 2.

4 Montrer que la famille $(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est orthonormée grâce aux résultats des questions 2 et 3.

5 Utiliser les questions 3 et 4.

6 Considérer les monômes de degré $n-1$ dans les deux membres de l'égalité obtenue à la question 5.

8 Constater que, pour tout $p \in [\![\, 0\,; \lfloor n/2 \rfloor \,]\!]$, le polynôme $(-1)^p \mathrm{X}^{n-2p}\big(1-\mathrm{X}^2\big)^p$ est unitaire de degré n et utiliser la question 7.

9 Utiliser les formules de Moivre et du binôme de Newton pour exprimer $\cos(n\theta)$. Pour démontrer l'unicité de T_n, considérer un polynôme P vérifiant la relation voulue et montrer que le polynôme $\mathrm{T}_n - \mathrm{P}$ admet une infinité de racines.

10 Utiliser les questions 8 et 9 pour factoriser T_n.

11 Utiliser de nouveau les résultats des questions 8 et 9.

13 Après avoir montré que $\mathrm{Q}(z_k)$ est du signe de $(-1)^k$, utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[\, z_{k+1}\,; z_k\,]$. Conclure que Q est nul grâce au résultat de la question 12.

14 Pour tout $k \in [\![\, 0\,; n\,]\!]$, déterminer le signe de $\mathrm{Q}(z_k)$ comme à la question 13 et utiliser la monotonie de la famille $(z_0, \ldots, z_n)$.

15 Appliquer le résultat de la question 6 aux réels $z_0, \ldots, z_n$ puis les questions 12 et 14 pour montrer que $z_0, \ldots, z_n$ sont des racines de Q.

Partie II

16 Montrer par récurrence sur $k \in [\![\, 0\,; n\,]\!]$ que $r^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points.

17 Utiliser la fonction r indiquée dans l'énoncé et constater qu'elle s'annule en x ainsi qu'en $a_1, \ldots, a_n$. Appliquer alors le résultat de la question 16.

18 Utiliser le résultat de la question 17.

19 Appliquer le résultat de la question 18.

20 Considérer par exemple $\mathrm{Q}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k/k!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ces polynômes ne coïncident avec f en aucun point de $\mathbb{R}_-^*$ grâce à la formule de Taylor avec reste intégral.

22 Utiliser les résultats des questions 18 et 21.

25 Utiliser le théorème de dérivation des séries entières ainsi que les résultats des questions 23 et 24.

26 Pour un $r > 0$ bien choisi, déduire de la question 25 une majoration uniforme permettant d'utiliser le résultat de la question 18.

27 Utiliser les résultats des questions 10 et 11.

28 Utiliser les résultats des questions 17, 22 et 27.

29 Adapter le raisonnement utilisé à la question 26.

Partie III

30 Déterminer un équivalent simple de h_α en 1.

32 Utiliser le résultat de la question 31 et intégrer par parties.

33 Déterminer la limite de J_α quand α tend vers 0 grâce à la question 32 et au fait que $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi/2$.

34 Effectuer une comparaison série-intégrale.

35 Passer à la limite dans les inégalités obtenues à la question 34.

36 Utiliser les résultats des questions 33 et 35.

37 Revenir à la définition des polynômes de Lagrange associés aux réels $\pm\, a_{k,n}$, pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$, et regrouper les facteurs de ce produit qui correspondent à des points opposés.

38 Montrer que les $\big(\pm\, a_{k,n}\big)_{k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ sont $2n$ racines distinctes de Q_n et en déduire qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que

$$\mathrm{Q}_n = \big(\mu_n \mathrm{X} + \lambda_n\big) \prod_{k=0}^{n-1} \big(\mathrm{X}^2 - {a_{k,n}}^2\big)$$

Utiliser ensuite la parité de R_n pour montrer que $\mu_n = 0$.

39 Évaluer la relation démontrée à la question 38 en $\alpha\,\mathrm{i}$ puis utiliser le résultat de la question 37.

40 Utiliser les questions 36 et 39.

I. Étude de deux familles de polynômes

1 L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ et à valeurs réelles.

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique : pour $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)\,Q(a_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(a_k)\,P(a_k) = \langle Q, P\rangle$$

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire : pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (P_1 + \lambda P_2)(a_k)\,Q(a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} P_1(a_k)\,Q(a_k) + \lambda\sum_{k=1}^{n} P_2(a_k)\,Q(a_k)\\ \langle P_1 + \lambda P_2, Q\rangle &= \langle P_1, Q\rangle + \lambda\langle P_2, Q\rangle\end{aligned}$$

  Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, elle est également linéaire à droite. Elle est donc bilinéaire.

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive : pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$$

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie : si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie $\langle P, P\rangle = 0$, alors pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $P(a_k) = 0$. Par conséquent, $a_1, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de P, qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc P est nul.

Ainsi, $\boxed{\text{L'application } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

2 Soit $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$. On a

$$L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j}$$

Si $k = i$, alors chacun des facteurs dans le produit définissant $L_i(a_k)$ est égal à 1, donc $L_i(a_k) = 1$. Si $k \neq i$, alors le facteur d'indice $j = k$ de ce produit est nul, donc $L_i(a_k) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

3 Par définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et d'après le résultat de la question 2,

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \qquad \langle L_i, P\rangle = \sum_{k=1}^{n} L_i(a_k)\,P(a_k) = P(a_i)}$$

4 D'après les résultats des questions 2 et 3, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$\langle L_i, L_j\rangle = L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Centrale Informatique MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet traite de Formule 1. Il aborde deux façons de modéliser un circuit et étudie la gestion des résultats par une base de données relationnelle.

- La première partie présente une modélisation de circuit sous la forme d'une liste de caractères alphabétiques décrivant des lignes droites ou des virages à angle droit. Il faut écrire quelques fonctions vérifiant la validité d'un circuit, puis le tracer à l'aide de la bibliothèque graphique `turtle` dont les fonctions principales sont décrites dans l'annexe.
- La partie suivante propose une modélisation du circuit plus réaliste car elle prend en compte des virages en arc de cercle. Il faut à nouveau dessiner le circuit, d'abord avec `turtle`, ensuite au moyen de primitives de plus bas niveau.
- Dans la partie III, on modélise le temps de course. La première moitié est théorique et demande de résoudre les équations différentielles cinématiques. La seconde moitié utilise ces résultats pour calculer avec Python le temps minimal nécessaire pour finir la course.
- Enfin, la dernière partie pose quelques questions de SQL exploitant les données de six tables.

Ce sujet original est de difficulté très variable. Il associe des questions de géométrie et de physique à de la programmation, c'est en cela un bon sujet de modélisation. Malheureusement, certaines questions sont trop imprécises, et les réponses à apporter dépendent de la façon de les interpréter. Pareille latitude dans la réponse est commune dans les métiers d'ingénieur et de chercheur, mais n'est pas habituelle en prépa.

Les trois parties de Python sont très guidées mais d'une manière qui peut ne pas sembler naturelle. Le lien entre les questions n'est pas toujours évident, et leur enchaînement parfois déroutant.

Outre la répétition de tracés de circuits de Formule 1, ce sujet permet de s'entraîner au méta-jeu consistant à se mettre dans la tête des concepteurs de l'épreuve pour deviner les réponses attendues à des questions accidentellement floues, ou encore de s'attaquer à une base de données relationnelle impliquant un nombre de tables inhabituel.

Indications

4 On pourra se demander comment un demi-tour est modélisé en représentation minimale. Si cela aide, on peut faire l'hypothèse pour cette question que la représentation d'un circuit commence forcément par une ligne droite.

5 Maintenir à jour trois variables caractérisant la position et l'orientation de la voiture tout au long du circuit.

6 En conservant l'historique des positions atteintes pendant un parcours du circuit, on peut vérifier à chaque étape que c'est la première fois qu'on atteint ce point. Il est alors pertinent de se demander si l'on a besoin d'appeler les fonctions `contient_demi_tour1` et `est_fermé1`.

8 Utiliser la fonction `isinstance` donnée dans l'annexe pour vérifier le type de `e`. Attention à bien traiter tous les cas.

9 Il est conseillé de s'aider de dessins pour visualiser les conséquences des signes des arguments de la fonction `turtle.circle` telles que décrites par l'annexe.

11 Considérer le cas où le vecteur `pos` envoyé à la fonction fait un angle `dir` avec l'horizontale.

12 On pourra commencer par écrire les deux fonctions annexes `fin_de_virage` et `fin_de_ligne_droite` qui calculent respectivement la position de sortie d'une ligne droite ou d'un virage. Le dessin doit partir du centre de l'écran, dont la position peut être déterminée à l'aide des dimensions du tableau `s`, accessibles avec `s.shape`.

17 Dans ce cas, le segment est parcouru en deux parties : la première pendant laquelle le pilote accélère de v_1 jusqu'à $v_{\max}$, la seconde dans laquelle il freine de $v_{\max}$ jusqu'à v_2.

18 Dans ce cas, le segment est parcouru en trois parties : les deux parties d'accélération et de freinage, séparées par une partie à vitesse constante $v_{\max}$.

20 Remarquer que l'on peut calculer la vitesse maximale d'entrée d'un élément si l'on connaît celle de l'élément suivant. En déduire un algorithme parcourant le circuit en sens inverse.

21 Commencer par gérer le cas où l'on soulève une exception `raise ValueError`. Gérer ensuite le cas où l'on peut accélérer durant toute la ligne droite. Les trois cas restants correspondent aux résultats des questions 17, 18 et 19.

22 Parcourir le circuit `c` et la liste de vitesses retournée par `vitesses_entrée_max` en même temps. Pour chaque élément, calculer le temps mis à le parcourir et retourner la somme de tous ces temps.

23 Ne pas chercher trop complexe : le corps de la fonction peut s'écrire en une ligne seulement avec un circuit bien choisi.

26 Utiliser les données numériques présentes dans l'introduction du problème.

27 Cette requête nécessite des données provenant de cinq tables. Pour calculer les différents temps des courses, additionner les temps des différents tours en question à l'aide des commandes `GROUP BY` et `SUM`.

29 Commencer par expliquer la sous-requête imbriquée.

I. Modélisation sommaire d'un circuit

1 Dans la représentation proposée, les virages "G" et "D" se faisant sur place, seule la lettre "A" représente des portions de route. On peut les compter à l'aide de la méthode count donnée à la fin de l'énoncé. Il faut ensuite multiplier leur nombre par leur longueur d pour obtenir la longueur totale de la route.

```
def longueur1(c: [str], d: int) -> int:
    return d * c.count("A")
```

> Cette solution est la plus courte et la plus idiomatique, mais il est bien sûr possible de réimplémenter la méthode count manuellement, par exemple avec une boucle for.
>
> ```
> def longueur1(c: [str], d: int) -> int:
>     n = 0
>     for e in c:
>         if e == "A":
>             n += 1
>     return d * n
> ```
>
> On notera que le sujet n'impose pas de recopier les annotations de type. On a fait le choix de le faire ici pour des raisons pédagogiques.

2 Comme on le voit à la ligne 5, la fonction représentation_minimale examine chaque élément de la liste c un par un. Quand ces éléments correspondent à des virages, elle incrémente ("G") ou décrémente ("D") la variable nbg modulo 4. Lorsqu'elle arrive sur une ligne droite, elle ajoute au résultat res l'élément de virages dont l'indice correspond à la valeur de nbg, remet cette variable à zéro et ajoute enfin la ligne droite à res. On en conclut que

> À tout moment, la variable nbg contient le nombre de virages de 90° à gauche qu'il faut effectuer pour tourner d'un angle égal à celui résultant de la séquence de virages effectués depuis la dernière ligne droite.

Par suite, L'expression proposée vaut ["A", "A", "D", "A"].

3 Comme son nom l'indique, la fonction représentation_minimale calcule un circuit de longueur minimale qui a la même représentation graphique que le circuit qu'on lui passe en argument.

> L'énoncé est très ambigu quant aux contraintes sur les circuits. En effet, alors que la ligne 14 de la fonction montre clairement que des virages peuvent se trouver en fin de liste, l'énoncé ne précise pas s'il est autorisé pour la représentation d'un circuit de commencer par un virage. Le fait que cette contrainte n'est jamais explicitée rend difficile à évaluer s'il s'agit vraiment d'une hypothèse implicite de l'énoncé, ou d'une négligence qui rend accidentellement certaines questions beaucoup plus difficiles qu'elles ne devraient être.
>
> Cette contrainte est importante car la fonction ne remplit pas son contrat dans le cas général. En effet, en faisant l'hypothèse raisonnable que deux circuits identiques à une rotation près sont équivalents, des virages en début

et fin d'un circuit fermé ne se simplifieraient pas, comme par exemple dans le circuit suivant : `GAGAGAAGAGAD`. Si les circuits ne peuvent commencer que par un `"A"`, alors la fonction est correcte.

4 On peut détecter les demi-tours du circuit en cherchant deux lettres `"G"` consécutives dans sa représentation minimale. Le sujet ne précisant pas si la représentation donnée à la fonction est minimale ou non, on commence par calculer la représentation minimale au cas où. On regarde ensuite chaque paire d'éléments consécutifs à la recherche de deux lettres `"G"` successives.

```
def contient_demi_tour1(c: [str]) -> bool:
    c_minimale = représentation_minimale(c)
    # Vérification du circuit
    for i in range(len(c_minimale) - 1):
        if c_minimale[i:i+2] == ["G", "G"]:
            return True
    return False
```

Cette question est remarquablement peu claire, et sans doute beaucoup plus complexe à résoudre que les concepteurs du sujet ne le prévoyaient. En effet, son résultat dépend de plusieurs hypothèses qui ne sont qu'implicites. Doit-elle fonctionner pour tous les circuits, ouverts et fermés ? Dans le cas des circuits fermés, doit-on faire l'hypothèse qu'ils sont parcourus plusieurs fois ? Les circuits peuvent-ils commencer par un virage ? Chacun de ces cas implique des réponses différentes.

Essayons d'être bienveillant avec l'énoncé et de lire entre les lignes. Le fait que cette question suive immédiatement celle de la représentation minimale, et qu'une question impliquant des positions n'arrive qu'à la question 6, suggère que l'énoncé attend que l'on utilise seulement la représentation minimale. Par ailleurs, le fait que la question 5 demande d'écrire une fonction vérifiant si le circuit est fermé laisse à penser que la fonction attendue ici ne doit pas faire cette vérification. On a alors deux possibilités : soit il est attendu que la fonction `contient_demi_tour1` considère tous les circuits comme ouverts (et qu'elle a donc le droit de se tromper sur les circuits en boucle), soit qu'elle les considère tous comme fermés et parcourus plusieurs fois (et qu'elle a le droit de se tromper sur les circuits ouverts).

Le premier cas est le plus simple et était probablement celui qui était attendu (c'est la réponse que l'on donne dans ce corrigé). Mais c'est alors un exemple de mauvaise conception de sujet, puisque cette fonction n'est pas réutilisable à la question 6, qui doit être correcte pour les circuits en boucle.

Le deuxième cas, sûrement le plus naturel étant donnés les termes du sujet, est beaucoup plus complexe car il demande de gérer tous les cas particuliers impliquant des virages au début et à la fin du circuit (réfléchir par exemple à `AGADADADAA`, `GAGADADADAAG` ou encore `GGAGAGAGAD`). La solution la plus simple dans ce cas serait probablement de commencer par placer tous les virages initiaux à la fin du circuit, et de calculer la représentation minimale de ce nouveau circuit, équivalent au circuit donné mais où chaque demi-tour est bien équivalent à deux `"G"` consécutifs.

Bref, à question maladroite beaucoup de bonnes réponses, certaines faisant perdre plus de temps que d'autres. Dans ce genre de cas, aller au plus simple et briser le quatrième mur en expliquant en quelques lignes pourquoi l'énoncé est déroutant est généralement une bonne stratégie.

Mines Maths 1 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Michèle Nouvet (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

L'objet de ce problème d'analyse est d'obtenir une suite dominante de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où p_n est le nombre de partitions d'un entier naturel n, défini au début de la partie C. Les parties B, C et D utilisent les résultats de la partie A mais peuvent être traitées indépendamment en admettant ces derniers.

- Dans la partie A, on étudie deux fonctions définies sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, la somme L d'une série entière et la limite P d'un produit. Cette partie est très abordable et proche du cours.
- La partie suivante établit un développement asymptotique au voisinage à droite de 0 de la quantité $\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-t})$, dont le résultat sera utilisé dans la partie E. On y utilise à la fois de l'analyse classique de première année et des théorèmes d'interversion séries-intégrales de PC.
- La troisième partie définit et étudie le nombre p_n, notamment en reliant la série entière $\sum p_n z^n$ aux fonctions L et P de la partie A. Les questions 17 et 18 sont les deux seules questions de combinatoire du sujet. La dernière question revient à démontrer la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions de la variable complexe, adaptée à ce cadre.
- Dans la partie D, on majore le module d'une quantité dépendant de la fonction P de la question 21. Les calculs sont un peu techniques mais bien guidés par l'énoncé.
- Enfin, la dernière partie conclut sur une suite dominante de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, proche d'un équivalent montré par Hardy et Ramanujan en 1918. Elle est constituée d'une unique question, abordable en admettant les résultats intermédiaires.

Comme souvent, ce problème de combinatoire est relié à des notions d'analyse, pour une fois sans probabilités. Il nécessite beaucoup de manipulations d'inégalités et de majorations d'intégrales.

Le travail s'effectue surtout sur les séries entières. On utilise divers théorèmes d'analyse de PC comme l'intégration terme à terme, les intégrales à paramètres et la convergence normale, ce qui permet de balayer l'essentiel du programme d'analyse de prépa. Seule la partie D est abordable dès la première année et peut être extraite pour s'entraîner avant la PC.

Par ailleurs, on peut retrouver un lien entre les partitions d'un entier naturel n et les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (les permutations de $[\![1\,;n]\!]$) dans le sujet Centrale Maths 1 MP 2020.

Indications

Partie A

1 Majorer le terme général de la série et reconnaître une primitive d'une série géométrique.

2 Dériver terme à terme la série entière Φ de la variable t.

3 Montrer que $\Psi' = 0$.

4 Utiliser l'inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.

5 Étudier les sommes partielles de la série définie dans la question 4.

Partie B

6 Pour la parité de $|q|$, distinguer les cas suivant le signe de $q(x)$.

8 Calculer

$$\int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

puis sommer et se ramener à des sommes télescopiques.

9 Poser $n = \lfloor x \rfloor$, majorer l'intégrale, puis utiliser la formule de Stirling.

10 Développer en série l'intégrande à l'aide de la fonction L puis intégrer terme à terme.

11 Après avoir montré l'indication de l'énoncé, majorer l'intégrande à l'aide de cette fonction.

12 Appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres sur $\mathbb{R}_+^*$, puis montrer la continuité en 0 à l'aide d'un équivalent.

13 Distinguer les cas des indices pairs et impairs, puis appliquer le critère spécial des séries alternées.

14 Montrer que la convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ puis utiliser la continuité en 0 de la somme.

15 Calculer $$\int_n^{n+1} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{\,tu}-1}\,\mathrm{d}u$$

à l'aide d'une intégration par parties. Sommer pour $n \in [\![\, 1\,; \mathrm{N}\,]\!]$ puis étudier les limites quand $\mathrm{N} \to +\infty$.

16 Isoler le terme $\ln(\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,-t}))$ dans le résultat de la question 15 puis utiliser le changement de variable $v = tu$ dans l'intégrale.

Partie C

17 Établir une injection de $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}+1}$ et montrer que c'est une bijection pour tout $\mathrm{N} \geqslant n$.

18 Développer le quotient en série géométrique. Pour l'hérédité de la récurrence, effectuer un produit de Cauchy de séries absolument convergentes et partitionner $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}+1}$ suivant la valeur du dernier terme de la liste.

19 Utiliser le résultat de la question 17 pour majorer la somme.

20 Utiliser le résultat de la question 17 et l'inégalité triangulaire, puis le résultat de la question 18.

21 Intégrer terme à terme le développement en série de $\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,-t}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta})$.

Partie D

22 Calculer le module avec la formule $|e^{z}| = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, puis majorer une somme de réels négatifs par son premier terme. Pour la seconde partie de la question, majorer des sommes partielles d'ordre N par des sommes géométriques et étudier les limites quand $\mathrm{N} \to +\infty$.

23 Calculer le module de la partie réelle puis le minorer. Pour la seconde partie de la question, utiliser l'indication de l'énoncé.

24 Utiliser qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Appliquer les inégalités de la question 23 à $x = e^{-t}$.

25 Majorer

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2\right)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

en utilisant la parité des intégrandes, le changement de variable $u = t^{-3/2}\theta$.

Partie E

26 Utiliser les résultats des questions 16, 23 et 21.

A. Fonctions L et P

1 Soit $z \in \mathrm{D}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{z^n}{n}\right| \leqslant |z|^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente car $|z| < 1$. Ainsi la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$$

converge absolument, donc converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathrm{D}, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \text{ converge.}}$$

La série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} z^{n-1}$$

a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$$

sur l'intervalle de réels $]-1\,;1\,[$ car c'est une série géométrique. En intégrant terme à terme cette série entière entre 0 et $t \in\,]-1\,;1\,[$, comme le terme constant est nul, on obtient

$$\boxed{\forall z \in\,]-1\,;1\,[\quad \mathrm{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)}$$

> On peut aussi affirmer d'après le cours que l'on a le développement en série entière suivant
>
> $$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$
>
> d'où
>
> $$\forall z \in\,]-1\,;1\,[\quad \mathrm{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-z)^n}{n} = -\ln(1-z)$$

2 Soit $z \in \mathrm{D}$ avec $z \neq 0$ et posons $a = 1/|z|$. On a $a > 1$. Pour tout $t \in\,]-a\,;a\,[$, on a $|tz| < 1$, de sorte que la quantité

$$\Phi(t) = \mathrm{L}(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$

est bien définie. De plus, la fonction Φ est la somme d'une série entière de la variable t. Notons R son rayon. Si $z = 0$, alors $\Phi(t) = 0$. Sinon, $z \neq 0$ et si $|t| < 1/|z|$, alors

$$\left|\frac{\dfrac{z^{n+1}}{n+1} t^{n+1}}{\dfrac{z^n}{n} t^n}\right| = \frac{n}{n+1}\,|z|\,|t| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|\,|t| < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, cette série entière converge, donc $\mathrm{R} \geqslant 1/|z| > 1$. En tant que série entière, Φ est dérivable sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, et en dérivant terme à terme, il vient, pour tout $t \in [\,-1\,;1\,] \subset\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$,

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{L}(tz)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{+\infty} (zt)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}$$

Mines Maths 2 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à la démonstration d'un résultat dû à M. N. Spijker en 1991, qui améliore le théorème matriciel de H. O. Kreiss établi en 1962. Il s'agit d'une inégalité permettant de caractériser des propriétés de stabilité des puissances de matrices.

- Dans la partie 1, on définit et on étudie la norme d'opérateur, une norme sur l'espace des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Les différentes expressions de cette norme seront utiles tout au long du sujet.
- La partie 2 introduit l'ensemble $\mathcal{B}_n$ des matrices M dont la suite des puissances est bornée pour la norme d'opérateur. On note $b(\mathrm{M})$ la borne supérieure de ces normes et on utilise cette propriété pour montrer que les valeurs propres des matrices de $\mathcal{B}_n$ sont de module inférieur ou égal à 1.
- Ensuite, la 3e partie s'intéresse à la résolvante d'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: il s'agit d'une famille de matrices $(\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))$ dont les propriétés étudiées servent en fin de sujet.
- En se plaçant dans l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la partie 4 permet d'élaborer une inégalité entre la variation totale et la norme infinie d'une fonction, en faisant intervenir le nombre maximal d'antécédents d'un réel donné par cette fonction.
- La partie 5 permet de démontrer l'inégalité de Spijker, qui est une application de l'inégalité de la partie précédente à des fonctions ayant une forme spécifique.
- Dans la dernière partie, on fixe $\mathrm{M} \in \mathcal{B}_n$ et on obtient une majoration de $b(\mathrm{M})$ qui peut être interprétée comme un résultat de stabilité sur les puissances de M. Cette borne dépend notamment de la famille $(\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))$, qui est en général plus facile à calculer que l'ensemble des puissances de M. Ce résultat a été obtenu par Spijker.

Le sujet aborde de nombreux thèmes du programme de PC, notamment les matrices, les polynômes, les séries et l'intégration. C'est un sujet assez long et plutôt technique, avec des variations de difficulté importantes entre les questions. Le travailler permet donc de gagner en efficacité et en lucidité. Les parties 1 et 4 abordent des notions classiques qu'il est bon de connaître avant de passer les concours.

Indications

1 Pour le premier point, montrer que l'application est continue et définie sur un ensemble fermé et borné. Utiliser la première propriété pour démontrer la seconde.

2 Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la première égalité, puis revenir à la définition de $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ donnée en question 1 pour la deuxième.

4 Étudier d'abord le cas $n = 2$ et exhiber une matrice M_2 et un vecteur X_2 tels que la suite $(\|{\mathrm{M}_2}^k\,\mathrm{X}_2\|)_{k\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée, puis utiliser la question 3. Généraliser en dimension quelconque en complétant la matrice M_2 par des blocs nuls.

5 Si M est diagonalisable, écrire $\mathrm{M} = \mathrm{QDQ}^{-1}$ avec D diagonale et Q inversible, montrer que $\mathrm{R}_z(\mathrm{M}) = \mathrm{QR}_z(\mathrm{D})\mathrm{Q}^{-1}$ puis utiliser la formule du produit matriciel pour calculer $(\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))_{i,j}$.

7 En se plaçant dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \|.\|_{\mathrm{op}})$, appliquer l'indication avec $v_j = \mathrm{M}^j/z^{j+1}$ pour obtenir le premier résultat. Ensuite, développer l'expression à simplifier pour faire apparaître une somme télescopique.

9 Utiliser la convergence normale de la série définissant u pour justifier sa continuité et l'interversion série-intégrale.

10 Utiliser l'écriture de $\mathrm{R}_z(\mathrm{M})$ sous forme de série démontrée à la question 7.

11 En pensant à des fonctions sinusoïdales, trouver une suite de fonctions uniformément bornées qui oscillent de plus en plus rapidement.

12 Utiliser la relation de Chasles et le fait que f' est de signe constant sur chaque intervalle $[\,t_j\,;t_{j+1}\,]$.

13 Montrer que $f^{-1}(\{y\}) \cap [\,t_j\,;t_{j+1}\,[$ est soit vide, soit un singleton, puis que le cardinal de cet ensemble est égal à $\psi_j(y)$. En déduire que

$$\mathrm{N}(y) = \sum_{j=0}^{\ell} \psi_j(y)$$

14 Montrer que $f(t) = y$ équivaut à

$$\mathrm{e}^{-iu}\,\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,it})\,\overline{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,it})} + \mathrm{e}^{\,iu}\,\overline{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,it})}\,\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,it}) - 2y\,\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,it})\,\overline{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,it})} = 0$$

puis multiplier cette équation par $\mathrm{e}^{\,int}$ et montrer que le membre de gauche est de la forme $\mathrm{S}(\mathrm{e}^{\,it})$ avec $\mathrm{S} \in \mathbb{C}_{2n}[\mathrm{X}]$.

15 Pour la deuxième égalité, remarquer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad a\cos(u) + b\sin(u) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(u-\omega)$$

16 Se rappeler que $f_u(t) = g(t)\cos(u) + h(t)\sin(u)$ et appliquer la question 15.

17 Si f_u n'est pas constante, utiliser l'inégalité (2) à f_u' puis la question 14.

18 Faire apparaître la forme intégrale souhaitée grâce aux questions 10 puis 6. Pour montrer la borne sur $|\mathrm{F}_r(z)|$, appliquer à nouveau les questions 6 et 2.

20 À k fixé, utiliser la question 2, puis appliquer le résultat de la question 19 avec $r = 1 + \dfrac{1}{k+1}$ et l'inégalité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^{\,x}$ valable pour $x \in \mathbb{R}_+$. Enfin, revenir à la définition de $b(\mathrm{M})$.

1. Norme d'opérateur sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

1 Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Considérons les applications

$$\|.\| : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathrm{X} \longmapsto \|\mathrm{X}\| \end{cases} \qquad \text{et} \qquad p_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{MX} \end{cases}$$

La première est une norme par rappel de l'énoncé, la seconde est une application linéaire en dimension finie, donc elles sont continues. Alors l'application

$$g_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \Sigma_n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathrm{X} \longmapsto \|\mathrm{MX}\| \end{cases}$$

est également continue en tant que restriction à Σ_n de la composée d'applications continues $\|.\| \circ p_{\mathrm{M}}$.

Regardons l'ensemble Σ_n. Il est borné (tous ses éléments étant de norme 1) et fermé puisque $\Sigma_n = \|.\|^{-1}(\{1\})$ et que $\|.\|$ est continue.

La fonction g_{M} est continue sur un ensemble fermé et borné. De ce fait, cette application est bornée et atteint ses bornes. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{X} \in \Sigma_n \longmapsto \|\mathrm{MX}\| \text{ atteint son maximum.}}$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On a donc

$$\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \max\{\|\mathrm{MY}\| \mid \mathrm{Y} \in \Sigma_n\}$$

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$, l'homogénéité de la norme assure que

$$\left\| \frac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|} \right\| = \frac{\|\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{X}\|} = 1$$

donc $\mathrm{X}/\|\mathrm{X}\| \in \Sigma_n$, ce qui implique en utilisant la linéarité du produit matriciel

$$\frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|} = \left\| \frac{\mathrm{MX}}{\|\mathrm{X}\|} \right\| = \left\| \mathrm{M} \frac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|} \right\| \leqslant \max\{\|\mathrm{MY}\| \mid \mathrm{Y} \in \Sigma_n\} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$$

Ainsi $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ est un majorant de

$$\left\{ \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|} \;\middle|\; \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\} \right\}$$

Par ailleurs, il existe $\mathrm{Y}_0 \in \Sigma_n$ tel que $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \|\mathrm{MY}_0\|$. Mais alors $\mathrm{Y}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ et comme $\|\mathrm{Y}_0\| = 1$ on a en fait

$$\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \frac{\|\mathrm{MY}_0\|}{\|\mathrm{Y}_0\|}$$

si bien que le majorant $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ est atteint en Y_0, donc c'est bien le maximum

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \max\left\{ \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|} \;\middle|\; \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\} \right\}}$$

Remarquons que la propriété précédente implique que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{MX}\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}\, \|\mathrm{X}\|$$

car si X est le vecteur nul, cette inégalité est trivialement vérifiée.

Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$. En utilisant deux fois la dernière inégalité on obtient comme $\mathrm{MX} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

$$\|(\mathrm{M}'\mathrm{M})\mathrm{X}\| = \|\mathrm{M}'(\mathrm{MX})\| \leqslant \|\mathrm{M}'\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{MX}\| \leqslant \|\mathrm{M}'\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{X}\|$$

d'où
$$\frac{\|(\mathrm{M}'\mathrm{M})\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant \|\mathrm{M}'\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$$

Ainsi
$$\|\mathrm{M}'\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \max \left\{ \frac{\|(\mathrm{M}'\mathrm{M})\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{X}\|} \;\middle|\; \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\} \right\} \leqslant \|\mathrm{M}'\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$$

On a donc montré que l'application $\|.\|_{\mathrm{op}}$ est sous-multiplicative, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2 \qquad \|\mathrm{M}'\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|\mathrm{M}'\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}}$$

2 Soit $\mathrm{U} = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{U} = 0$ l'égalité demandée est vérifiée puisque les deux membres sont nuls. Supposons donc $\mathrm{U} \neq 0$. Pour tout $\mathrm{V} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \Sigma_n$, on a par inégalité triangulaire

$$|\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}| = \left| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \langle |\mathrm{U}|\,,\, |\mathrm{V}| \rangle$$

où l'on a posé $|\mathrm{U}| = (|u_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $|\mathrm{V}| = (|v_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et où $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Par suite en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\big| \langle |\mathrm{U}|\,,\, |\mathrm{V}| \rangle \big| \leqslant \sqrt{\langle |\mathrm{U}|\,,\, |\mathrm{U}| \rangle} \sqrt{\langle |\mathrm{V}|\,,\, |\mathrm{V}| \rangle}$$
$$\big| \langle |\mathrm{U}|\,,\, |\mathrm{V}| \rangle \big| \leqslant \|\mathrm{U}\|\,\|\mathrm{V}\|$$

et donc
$$|\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}| \leqslant \|\mathrm{U}\| \qquad (\mathrm{V} \in \Sigma_n)$$

Ainsi $\|\mathrm{U}\|$ est un majorant de $\{|\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}| \mid \mathrm{V} \in \Sigma_n\}$.

Maintenant comme $\mathrm{U} \neq 0$, $\|\mathrm{U}\| \neq 0$ donc on peut considérer $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{U}}/\|\mathrm{U}\|$ où $\overline{\mathrm{U}} = (\overline{u_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors $\mathrm{V} \in \Sigma_n$ et

$$|\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}| = \frac{1}{\|\mathrm{U}\|} \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} u_i \right| = \frac{1}{\|\mathrm{U}\|} \|\mathrm{U}\|^2 = \|\mathrm{U}\|$$

si bien que le majorant $\|\mathrm{U}\|$ est en fait un maximum.

$$\boxed{\forall \mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \max \{|\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}| \mid \mathrm{V} \in \Sigma_n\} = \|\mathrm{U}\|}$$

> On s'est ramené ici au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. C'est un peu superficiel car l'application
>
> $$\langle\,.\,,\,.\,\rangle : (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \longmapsto \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\overline{\mathrm{U}}$$
>
> est en fait un produit scalaire (dans un sens hors programme : on parle de produit hermitien) sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ associé à la norme $\|.\|$, pour lequel l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable et donne alors plus rapidement le résultat (noter d'ailleurs que la restriction de cette application à $\mathbb{R}^n$ est le produit scalaire usuel).

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En utilisant ce qui précède et la question 1, il vient

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in {\Sigma_n}^2 \qquad |\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{MX}| = |\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}(\mathrm{MX})| \leqslant \|\mathrm{MX}\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$$

donc $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ est un majorant de

$$\left\{ |\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{MX}| \mid (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in {\Sigma_n}^2 \right\}$$

Mines Informatique MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde le thème du magnétisme des matériaux et la modélisation de son aspect aléatoire. Il contient une brève introduction décrivant la différence entre les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques, ainsi que l'importance de la température de Curie dans le comportement du matériau. Il est constitué de 4 parties indépendantes.

- Dans la partie I, on étudie l'évolution théorique de l'aimantation en fonction de la température. Cette évolution est définie à l'aide d'une relation non linéaire qu'il faut résoudre numériquement, ce qui donne l'occasion d'appliquer l'algorithme de recherche par dichotomie.
- La partie suivante fait intervenir des bases de données économiques (fournisseurs, matériaux, prix au kilogramme). Quatre questions de difficulté graduelle permettent de montrer ses compétences.
- La partie III, plus longue, étudie le modèle microscopique de l'aimantation à partir des sens *up* et *down* des spins présents à l'intérieur du matériau. L'échantillon est modélisé par un tableau à deux dimensions, où l'on cherche comment déterminer les éléments voisins notamment au bord de l'échantillon. Une recherche d'états typiques est réalisée par la méthode aléatoire de Monte-Carlo.
- Dans la dernière partie, il est question de reconnaissance de formes au sein des images produites précédemment. On réalise en particulier un marquage des domaines magnétiques dits de Weiss par la recherche des pixels voisins identiques. Une question aborde les fonctions récursives, une autre les piles.

Cette épreuve amène correctement un sujet complexe et le traite sous plusieurs aspects intéressants. Elle balaye l'ensemble du programme, avec des questions de difficulté progressive.

Indications

Partie I

3 Il faut reprendre l'algorithme de la recherche par dichotomie vu en cours et l'appliquer à cette fonction particulière qui possède un deuxième argument, constant.

4 La longueur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque itération. Combien d'itérations sont réalisées avant d'arriver à la bonne précision ?

5 La construction de la liste est classique, réalisée à l'aide de la méthode `append`. Attention, deux cas sont possibles en fonction de la valeur de t.

Partie II

7 Des colonnes de deux tables différentes sont nécessaires, il faut faire une jointure.

8 On doit récupérer le prix minimum et s'en servir pour sélectionner les bonnes lignes de la table obtenue par jointure. L'utilisation de l'opérateur `ORDER BY` ne donne pas le bon résultat ici.

9 On peut générer la table contenant le prix moyen de tous les matériaux, puis y sélectionner uniquement les prix moyens voulus en imbriquant la requête précédente à l'intérieur d'une nouvelle requête.

Partie III

11 Il est possible d'adapter le code de la question précédente pour modifier les valeurs une ligne sur deux.

12 L'extraction des valeurs de `s` entre les indices `a` et `b` exclu se fait par `s[a:b]`.

13 Le plus simple est de traiter le cas général en premier, puis d'ajouter une modification de chaque voisin dans le cas où le spin se trouve sur un des bords de l'échantillon.

14 L'équation 3 de l'énoncé montre la nécessité d'une double boucle, sur l'ensemble des spins puis sur les voisins de chaque spin. On doit récupérer les voisins avec la fonction définie à la question 13.

15 Il faut retourner une valeur booléenne, vraie dans deux cas disjoints.

16 Quelle est la complexité de la fonction `energie` ?

17 Le tirage au hasard du spin à modifier est à réaliser avec la fonction `randrange`.

19 Comme à la question 18, la complexité du calcul de ΔE est essentiel.

20 Quelle est la différence d'énergie ΔE lorsqu'un spin change ? Peut-on simplifier le calcul, supprimer les sommes ?

Partie IV

22 La fonction `explorer_voisinage` regarde simplement chaque pixel voisin de `i` pour éventuellement en modifier la couleur et exécuter à nouveau la fonction sur ce pixel. On ne demande pas la fonction qui crée une nouvelle couleur.

23 L'utilisation d'une pile se fait à l'aide d'une boucle itérant tant que la pile est non vide. La pile doit être initialisée avec la valeur `i`.

24 Il faut exécuter la fonction précédente pour chaque pixel non encore traité, sans oublier d'incrémenter `num` à chaque fois.

I. Transition paramagnétique/ferromagnétique sans champ magnétique extérieur

1 Pour importer uniquement quelques fonctions à partir de modules, il faut utiliser la syntaxe

```
from math import exp, tanh
from random import randrange, random
```

2 L'équation donnée doit être résolue avec la variable m et se met sous la forme

$$f(x,t) = x - \tanh\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

d'inconnue x.

```
def f(x, t):
    return x - tanh(x/t)
```

3 On utilise la recherche par dichotomie d'une solution à l'équation $f(x,t) = 0$ où la variable est x alors que t est un paramètre fixé. Dans cet algorithme, on conserve deux valeurs correspondant aux deux bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution, initialement $[a,b]$. À chaque itération, on divise la largeur de l'intervalle par 2, car en appelant m le milieu de l'intervalle,

- soit $f(a,t)$ et $f(m,t)$ sont de signes opposés et cela signifie que la solution se trouve entre a et m, on peut donc affecter m à la variable b ;
- soit $f(a,t)$ et $f(m,t)$ sont de même signe et cela signifie que la solution ne se trouve pas entre a et m, on peut donc affecter m à la variable a.

On continue les itérations jusqu'à ce que la largeur de l'intervalle soit inférieure à $2\,\varepsilon$ pour obtenir un résultat final égal au milieu de l'intervalle. La solution réelle est nécessairement à une distance inférieure à ε de ce résultat.

```
def dicho(f, t, a, b, eps):
    while b - a > 2*eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a, t) * f(m, t) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a + b) / 2
```

4 À chaque itération, la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à l'aide d'un nombre d'opérations toujours identique et indépendant de a et b. En nommant n le nombre d'itérations, on peut dire que l'algorithme est de complexité linéaire en n. Au bout de n itérations, la largeur de l'intervalle de recherche est $(b-a)/2^n$. Il faut ainsi, pour sortir de la boucle, que

$$\frac{b-a}{2^n} \leqslant 2\,\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leqslant 2^{n+1}$$

soit

$$n \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$$

donc

$$\boxed{\text{La complexité de la fonction } \texttt{dicho} \text{ est en } \mathrm{O}\left(\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right).}$$

$\boxed{5}$ Il faut, pour chacune des 500 valeurs t uniformément réparties entre t_1 et t_2, appliquer la fonction `dicho` si $t < 1$ (le matériau est alors ferromagnétique), ou simplement définir une aimantation nulle si $t \geqslant 1$ (le matériau est alors paramagnétique).

```
def construction_liste_m(t1, t2):
    m = []
    n = 500
    pas = (t2 - t1) / (n - 1)
    for i in range(n):
        t = t1 + pas * i
        if t < 1:
            m.append( dicho(f, t, 0.001, 1, 1e-6) )
        else:
            m.append(0)
    return m
```

> La figure 1 de l'énoncé peut être obtenue avec le code
>
> ```
> t = [ 1.5*t/500 for t in range(1,501) ]
> m = construction_liste_m(t[0],t[-1])
> plt.plot(t,m)
> plt.grid()
> plt.show()
> ```

II. Recherche dans une base de données de matériaux magnétiques

$\boxed{6}$ Pour obtenir le nom des matériaux ayant une température de Curie inférieure à 500 kelvins, il faut exécuter la sélection

```
SELECT nom FROM materiaux WHERE t_curie < 500;
```

$\boxed{7}$ Les noms de fournisseurs sont dans la table `fournisseurs` alors que les prix sont dans la table `prix`. Il faut donc réaliser une jointure avant la sélection, soit la requête

```
SELECT nom_fournisseur, prix_kg * 4.5
FROM fournisseurs JOIN prix ON id_fournisseur = id_four
WHERE id_mat = 8713;
```

$\boxed{8}$ Le prix minimal peut être obtenu par l'utilisation de la fonction d'agrégation `MIN` mais pas le fournisseur correspondant, car une telle fonction n'agit que sur une seule colonne du résultat. Ce n'est donc pas la projection (après l'opérateur `SELECT`) mais la sélection (après l'opération `WHERE`) qu'il faut modifier, en y incluant une condition sur le prix à l'aide d'une sous-requête, entre parenthèses.

```
SELECT nom_fournisseur, prix_kg * 4.5
FROM fournisseurs JOIN prix ON id_fournisseur = id_four
WHERE id_mat = 8713
AND prix_kg = (SELECT MIN(prix_kg) FROM prix WHERE id_mat = 8713);
```

> Si l'on conserve la requête de la question 7 et que l'on classe les lignes à l'aide de `ORDER BY prix`, on ne peut alors pas savoir si plusieurs fournisseurs sont aussi compétitifs. Ce n'est donc pas une réponse valable.

X/ENS Maths PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bosch (professeur en CPGE) ; il a été relu par Hicham Assakaf (ENS Paris-Saclay) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Dans ce sujet, on s'intéresse à des équations dans des espaces vectoriels normés de dimension finie. On démontre l'existence (et parfois l'unicité) de solutions et l'on donne quelques méthodes numériques d'approximation des solutions.

Les trois premières parties sont indépendantes ; la partie IV s'appuie sur les résultats de la partie III.

- La partie I est très abordable et utilise peu de notions vues en deuxième année. On y démontre le théorème du point fixe de Picard, qui permet de démontrer dans divers cas de figure l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une application ϕ. Il fournit au passage un procédé itératif permettant de l'approcher.
- La partie suivante fait intervenir un peu de réduction dans le but de majorer $\|\mathrm{A}x\|$ en fonction de $\|x\|$ pour une matrice carrée A et un vecteur colonne x. On démontre ensuite un second théorème du point fixe.
- La partie III est consacrée à l'étude de la fonction à deux variables H_f définie par

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}$$

  où $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur I telle que $f' > 0$. On montre que la fonction H_f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$.
- Dans la dernière partie, on expose la méthode de la sécante, procédé itératif comparable à la méthode de Newton et qui permet de déterminer une solution approchée d'une équation $f(x) = 0$. On démontre que sous certaines hypothèses, cette méthode converge, c'est-à-dire que le procédé itératif est correctement défini et qu'il converge vers la solution.

  Par ailleurs, on illustre cette méthode sur un exemple simple en apparence mais dont l'étude se révèle finalement plus compliquée que les questions théoriques de cette dernière partie.

Le sujet est long et répétitif mais abordable. Il utilise les chapitres d'analyse (espaces vectoriels normés, théorèmes de convergence dominée et de dérivation des intégrales à paramètres, calcul différentiel) et de l'algèbre linéaire (réduction) dans la partie II.

Indications

Première partie

I.2 Montrer que la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \phi(x) - x$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

I.4.a On rappelle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

I.5.a Ne pas oublier de justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie sur $\mathbb{N}$ puis utiliser la question I.4.a en montrant $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$ pour tout entier naturel n.

I.5.c Utiliser la question I.4.b.

I.5.d Montrer que $\theta(x^*)$ est un point fixe de ϕ puis se servir de l'unicité de x^*.

I.6 Considérer la borne supérieure M de l'ensemble E. Montrer que $g(\mathrm{M}) \geqslant \mathrm{M}$ puis constater que $g(\mathrm{M}) \in \mathrm{E}$ pour montrer l'inégalité réciproque.

Deuxième partie

II.1 Considérer le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu)$.

II.2.a Se ramener à la question précédente en utilisant le fait que dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

II.2.b C'est un calcul...

II.3.a Fixer un réel ε strictement compris entre 0 et η de sorte que

$$\frac{\rho(\mathrm{A}) + \varepsilon}{\rho(\mathrm{A}) + \eta} \in \,]\,0\,;1\,[$$

puis se servir du résultat de la question II.2.b.

II.4.b Considérer une matrice non nulle C dont le spectre est $\{0\}$.

II.5 Trouver une hypothèse similaire faisant intervenir la norme N de la question II.3. Ensuite, utiliser l'inégalité triangulaire pour majorer $\mathrm{N}(x_{n+1} - x^*)$ en faisant apparaître $\mathrm{N}(x_{n+1} - x^* - \mathrm{A}(x_{n+1} - x^*))$.

Troisième partie

III.1.a Appliquer le théorème fondamental de l'analyse.

III.1.b Appliquer le théorème des accroissements finis.

III.3.a Calculer la dérivée de la fonction $\lambda \mapsto g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$.

III.3.b Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée.

III.3.c Appliquer plusieurs fois le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

III.4.a Utiliser le résultat de la question III.1.b.

Quatrième partie

IV.2.b Pour démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie, prouver que si x_{n-1} et x_n sont éléments de I, alors $x_{n+1} \neq \beta$ puis $|h(x_{n+1})| < 1$.

IV.2.c Considérer la suite $(\ln |u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

IV.3.b Utiliser la question III.4.a.

I. Points fixes

I.1 Soit $\phi : [\,a\,;b\,] \to [\,a\,;b\,]$ une fonction continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$. Considérons la fonction $\psi : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \phi(x) - x$. Montrer que ϕ admet un point fixe revient à montrer que ψ s'annule sur $[\,a\,;b\,]$. Cette fonction est continue sur $[\,a\,;b\,]$ comme différence de telles fonctions et puisque ϕ est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$,

$$\psi(a) = \phi(a) - a \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \psi(b) = \phi(b) - b \leqslant 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $\psi(c) = 0$, autrement dit, tel que $\phi(c) = c$. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } \phi \text{ possède au moins un point fixe dans } [\,a\,;b\,].}$$

I.2 On suppose que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\sup\{|\phi'(x)|\ ;\ x \in \mathbb{R}\} < 1 \tag{1}$$

Notons $\lambda = \sup\{|\phi'(x)|\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ (on a $\lambda \in [\,0\,;1\,[$) et considérons la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \phi(x) - x$. Nous allons appliquer le théorème de la bijection à la fonction ψ. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions $\mathscr{C}^1$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi'(x) = \phi'(x) - 1 \leqslant \lambda - 1$$

Le réel $\lambda - 1$ étant strictement négatif d'après (1), on en déduit que ψ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Appliquons maintenant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ϕ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\phi(x) - \phi(0)| \leqslant \lambda\,|x|$$

Il vient
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad -\lambda x \leqslant \phi(x) - \phi(0) \leqslant \lambda x$$

puis en ne conservant que l'inégalité de droite,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \psi(x) = \phi(x) - x \leqslant \phi(0) - (1-\lambda)x$$

On a aussi
$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad \lambda x \leqslant \phi(x) - \phi(0) \leqslant -\lambda x$$

puis en ne conservant cette fois que l'inégalité de gauche,

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad \phi(0) - (1-\lambda)x \leqslant \phi(x) - x = \psi(x)$$

Or, $1 - \lambda > 0$ donc

$$\phi(0) - (1-\lambda)x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \phi(0) - (1-\lambda)x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

On en déduit en appliquant les théorèmes de majoration et de minoration que

$$\psi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \psi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection strictement décroissante. En particulier, ψ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } \phi \text{ possède un unique point fixe dans } \mathbb{R}.}$$

> Lorsque l'on suppose $\sup\{|\phi'(x)|\ ;\ x \in \mathbb{R}\} < 1$, on suppose en fait que l'ensemble $\{|\phi'(x)|\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$, qui est une partie non vide de $\mathbb{R}$, est majoré par un réel strictement inférieur à 1.

I.3 Considérons la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \sqrt{1+x^2}$. On a $1+x^2 > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc ψ est correctement définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Par ailleurs, pour tout réel x, on a

$$0 \leqslant x^2 < 1 + x^2 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant \frac{x^2}{1+x^2} < 1$$

puis par stricte croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$,

$$0 \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$

Par conséquent, $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\psi'(x)| < 1$$

Montrons que ψ ne possède pas de point fixe. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \psi(x) = x &\iff \sqrt{1+x^2} = x \\ &\implies 1 + x^2 = x^2 \\ &\iff 1 = 0 \end{aligned}$$

En particulier, $$\psi(x) = x \implies 1 = 0$$

L'assertion $1 \neq 0$ étant vraie, on obtient par contraposition $\psi(x) \neq x$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi(x) \neq x$$

Cela signifie que la fonction ψ ne possède pas de point fixe.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'hypothèse (1) de la question I.2 ne peut être remplacée par} \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\phi'(x)| < 1\end{array}}$$

> La fonction ψ n'admet pas de point fixe bien que l'on ait $|\psi'(x)| < 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, l'hypothèse (1) n'est pas vérifiée par ψ. En fait, l'ensemble
>
> $$\mathrm{E} = \{|\psi'(x)|\,;\ x \in \mathbb{R}\}$$
>
> est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Cet ensemble admet donc une borne supérieure M (*ie* M est le plus petit majorant de E). Le réel 1 étant un majorant de E, on déduit $\mathrm{M} \leqslant 1$ par minimalité de M. En outre,
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\psi'(x)| \leqslant \mathrm{M} \qquad \text{et} \qquad |\psi'(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$
>
> d'où, par passage à la limite, $\mathrm{M} \geqslant 1$. On obtient ainsi
>
> $$\sup\{|\psi'(x)|\,;\ x \in \mathbb{R}\} = 1$$

I.4.a D'après le cours, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente converge. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^\ell$ étant de dimension finie, on en déduit que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge. Or, la convergence de cette série télescopique revient à la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse au remplissage d'une grotte lors d'une inondation. Plus précisément, étant donné une grotte et une source d'eau de débit constant, on souhaite déterminer la hauteur d'eau en tout point de la grotte à un instant donné. Le sujet est de difficulté globalement croissante et doit être abordé dans l'ordre, chaque partie reposant sur les notions précédemment introduites.

- Dans la première partie, on modélise une grotte par une liste de déplacements verticaux et horizontaux décrivant le profil de la grotte. Il s'agit principalement d'écrire des fonctions permettant de vérifier qu'une suite de déplacements correspond à des profils de grottes valides. Les questions de cette partie sont plutôt abordables.
- La deuxième partie s'intéresse au cas particulier du remplissage d'une vallée, qui est un type particulier de grotte dans lequel la source est située au fond de la vallée. Il apparaît notamment qu'en décomposant la vallée en rectangles de moins en moins profonds, on peut écrire un programme qui évalue la hauteur d'eau à tout instant. Cette partie comporte trois questions permettant d'y parvenir ; l'une d'elles est particulièrement délicate.
- Enfin, la partie III traite le cas plus général d'une grotte dite à ciel ouvert. On commence comme précédemment par décomposer la grotte en rectangles, mais cette fois ceux-ci sont liés par une structure arborescente longuement détaillée (trois pages d'énoncé !). Une fois cette structure arborescente déterminée, on peut en déduire l'ordre de remplissage des différents rectangles puis la hauteur d'eau dans chacun d'eux. Deux sous-parties s'intéressent respectivement au cas d'une source positionnée à l'entrée gauche de la grotte, et au cas - beaucoup plus difficile - d'une source arbitrairement positionnée.

Comme très souvent au concours X/ENS, nous avons affaire ici à un sujet exclusivement algorithmique, très bien écrit et détaillé. Il propose l'étude d'un problème intéressant (et même amusant), donnant lieu à l'implémentation d'algorithmes élaborés et à l'étude de leurs complexités. Certaines questions peuvent être traitées de façon simple et élégante en utilisant la récursivité ; il vaut donc mieux aborder ce sujet en deuxième année. Même s'il ne comporte que 15 questions, aucun des codes demandés ne contient moins de 5 lignes, et certains sont particulièrement longs et/ou difficiles. Il s'agit donc d'un bon sujet pour s'entraîner à écrire rapidement du code correct.

Indications

Partie I

1 Pour repérer les rebroussements, utiliser une boucle où chaque tour examine deux pas successifs dans la liste.

2 Dans une vallée, on doit d'abord trouver tous les déplacements `B`, et ensuite tous les déplacements `H`. On peut distinguer les deux phases en mettant à jour une variable lorsque l'on rencontre un déplacement `H`.

4 Appliquer la fonction `voisin` sur le dernier point ajouté dans la liste à renvoyer et le pas actuellement examiné.

5 Commencer par écrire une fonction testant si un élément est présent dans une liste donnée. L'utiliser ensuite pour repérer les points en double.

Partie II

6 Remarquer qu'il s'agit d'implémenter un algorithme de recherche de maximum dans une liste. Attention à bien renvoyer le point d'abscisse minimale parmi les plus profonds de la vallée.

7 Utiliser trois variables contenant la profondeur et les abscisses extrémales du plateau, et les mettre à jour en fonction du déplacement traité.

8 Question difficile de programmation. Commencer par repérer l'indice du fond de la vallée, puis parcourir les portions montante et descendante selon les profondeurs décroissantes en adaptant l'algorithme de fusion de deux listes triées. Mettre à jour les caractéristiques des rectangles à construire en fonction des profondeurs des deux plateaux comparés.

9 Parcourir les rectangles décomposant le volume intérieur de la vallée et les remplir entièrement du plus profond au moins profond tant que c'est possible. Attention à bien gérer le dernier rectangle partiellement rempli.

Partie III

10 Cette question est en apparence difficile, mais il s'agit uniquement de suivre à la lettre l'algorithme donné dans l'énoncé et de le traduire en Python. Introduire une variable supplémentaire correspondant au numéro du rectangle actuellement ouvert.

11 Remarquer que le remplissage d'un père ne peut se faire qu'après le remplissage de chacun de ses enfants, lesquels se remplissent de gauche à droite. En déduire une implémentation utilisant une fonction auxiliaire récursive `remplir(rect)` ajoutant, dans une liste définie au préalable, les numéros des rectangles.

12 Adapter le programme de la question 9 à l'ordre renvoyé par la fonction précédente.

14 Reprendre le principe de l'exploration récursive de la hiérarchie utilisé à la question 11.

15 On pourra commencer par traiter quelques cas particuliers, notamment les cas où l'eau ne remonte pas au dessus de la source, et celui où tous les rectangles ont une hauteur non nulle. En dehors de ces cas, l'un des rectangles ancêtres de la source sera partiellement rempli : détailler alors l'ordre de remplissage de ses enfants.

I. Validité d'un profil

1 Suivons la définition d'un profil sans rebroussement donnée par l'énoncé. On commence par vérifier que le profil de la grotte ne commence pas par `H` et ne se termine pas par `B`. On utilise ensuite une boucle permettant de vérifier que deux pas consécutifs ne correspondent jamais à des déplacements contraires.

```
def est_sans_rebroussement(g):
    if g[0] == H or g[-1] == B:
        return False
    for i in range(len(g)-1):
        if (g[i],g[i+1]) == (G,D) or (g[i],g[i+1]) == (D,G):
            return False
        if (g[i],g[i+1]) == (H,B) or (g[i],g[i+1]) == (B,H):
            return False
    return True
```

> On a choisi dans le code précédent d'écrire les quatre conditions à examiner à l'aide de deux tests pour plus de lisibilité. On aurait pu compacter ces deux tests en un seul test d'appartenance à la liste des couples de positions contraires, en utilisant l'opérateur `in` de Python. La boucle obtenue aurait alors été la suivante
>
> ```
> for i in range(len(g)-1):
>     if (g[i], g[i+1]) in [(G,D), (D,G), (H,B), (B,H)]:
>         return False
> ```
>
> Il est cependant difficile de savoir à la lecture du sujet si la syntaxe « `if x in L` » était autorisée mais il est également possible de reprogrammer rapidement une fonction réalisant ce test et de l'utiliser dans la suite du problème. C'est ce que nous ferons à la question 5, où il sera plus difficile de n'utiliser que les manipulations élémentaires de listes autorisées.
>
> Remarquons enfin que le premier test effectué nécessite que la liste `g` soit non vide. Il est toutefois inutile de gérer le cas de la liste vide à part, car l'énoncé précise que les profils considérés contiennent toujours au moins un pas vers la droite, ils sont donc en particulier non vides.

2 La fonction commence par contrôler que le profil considéré est sans rebroussement à l'aide de la fonction précédente. Il reste à vérifier que le profil ne contient pas de déplacement gauche, et que tous les déplacements vers le haut sont situés après tous les déplacements vers le bas dans la liste. Pour vérifier cette seconde contrainte, on utilise une variable `direction` qui contiendra `H` dès que l'on aura rencontré un premier `H` : toutes les directions verticales suivantes devront alors être des `H` également.

```
def est_une_vallee(g):
    if not est_sans_rebroussement(g):
        return False
    direction = B
    for pas in g:
        if pas == G or (direction == H and pas == B):
            return False
        if pas == H:
            direction = H
    return True
```

> Le profil d'une vallée n'est pas obligé de contenir au moins un déplacement vers le haut. Ceci peut paraître étonnant au premier abord (comment une telle grotte pourrait se remplir ?), mais l'énoncé précise que le profil de la grotte est implicitement prolongée par des murs verticaux infinis à gauche et à droite.

3 Une disjonction de cas permet de trouver les coordonnées du voisin à renvoyer.

```
def voisin(x, y, d):
    if d == G:
        return (x-1, y)
    if d == D:
        return (x+1, y)
    if d == B:
        return (x, y+1)
    else:
        return (x, y-1)
```

4 On initialise la liste des coordonnées à renvoyer avec l'origine du profil, puis pour chaque déplacement de la liste `g`, on ajoute les coordonnées du point obtenu en utilisant la fonction `voisin` appliquée au dernier point enregistré.

```
def liste_des_points(g):
    coords = [(0, 0)]
    for pas in g:
        x, y = coords[len(coords)-1]
        coords.append(voisin(x, y, pas))
    return coords
```

5 Un profil décrit par une liste `g` est simple si et seulement si la liste générée par l'appel `liste_des_points(g)` ne contient aucun doublon. Pour vérifier cette condition, on peut reprendre le code de la fonction `liste_des_points` en vérifiant avant chaque insertion d'un point que celui-ci n'est pas déjà présent dans la liste. Pour cela, on programme au préalable une fonction `appartient` réalisant un tel test d'appartenance.

```
def appartient(elt, L):
    for x in L:
        if elt == x:
            return True
    return False
```

> Dans le doute, il ne faut pas hésiter à définir rapidement une fonction plutôt qu'utiliser le raccourci « `if .. in ..` » qui n'est pas explicitement autorisé.

```
def est_simple(g):
    coords = [(0, 0)]
    for pas in g:
        x, y = coords[-1]
        suivant = voisin(x, y, pas)
        if appartient(suivant, coords):
            return False
        else:
            coords.append(suivant)
    return True
```