MP
Mathématiques · Informatique
2023

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

William Aufort
professeur en CPGE

Céline Chevalier
enseignant-chercheur à l'université

Sélim Cornet
professeur en CPGE

Pierre Faugère
ENS de Lyon

Christophe Fiszka
professeur en CPGE

Émile Hazard
ENS de Lyon

Sarah Houdaigoui
ENS Ulm

Loïc Jean
ENS de Lyon

Malory Marin
ENS de Lyon

Florian Metzger
professeur en CPGE

Hai Chau Nguyen
ENS de Lyon

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Jean Starynkévitch
professeur en CPGE

Bertrand Wiel
professeur en CPGE

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
	E3A		
Mathématiques	Endomorphisme d'un espace de polynômes, endomorphisme d'un espace de fonctions, intégrale à paramètre, vecteurs et matrices aléatoires. *algèbre linéaire, polynômes, réduction, séries de fonctions, intégration sur un intervalle quelconque, intégrales à paramètre, probabilités, analyse réelle, indépendance*	18	25
	CONCOURS COMMUN INP		
Mathématiques 1	Matrice d'adjacence, extrema d'une fonction de 2 variables, formule des compléments. *intégrales généralisées, suites et séries de fonctions, séries numériques, calcul différentiel, graphes, matrices*	55	61
Mathématiques 2	Projeté orthogonal, loi du maximum, projecteurs spectraux. *algèbre linéaire, réduction, espaces euclidiens, polynômes, probabilités, intégration*	77	82
Informatique optionnelle (filière MP)	Sélection du $(k+1)$-ième élément d'une liste, cliques de célébrités et automates cycliques. *programmation OCaml, algorithmes diviser-pour-régner, graphes, automates*	95	103
	CENTRALE-SUPÉLEC		
Mathématiques 1	Sur le calcul ombral. *algèbre linéaire, polynômes, réduction, suites et séries de fonctions, intégration*	116	121
Mathématiques 2	Autour de la fonction gaussienne. *intégration, calcul asymptotique, variables aléatoires, suites et séries numériques et de fonctions, probabilités, analyse réelle*	152	157
Informatique optionnelle (filière MP)	Langages et automates, implémentation d'ensembles. *automates, programmation en OCaml*	184	189

Mines-Ponts

Mathématiques 1	Théorème de Lyapounov. *algèbre linéaire, réduction, équations différentielles, calcul différentiel, algèbre bilinéaire, topologie, intégration, analyse réelle*	214	220
Mathématiques 2	Fonction de Wallis. *intégrales généralisées, intégrales à paramètres, suites et séries numériques et de fonctions, analyse réelle, séries entières*	234	240
Informatique commune	La typographie informatisée. *bases de données, algorithmes gloutons et récursifs, programmation dynamique, complexité*	262	271
Informatique optionnelle (filière MP)	Résolution du jeu du hanjie. *logique propositionnelle, automates, algorithmique, analyse de complexité, dénombrement*	285	297

Polytechnique-ENS

Mathématiques A	Quaternions, normes euclidiennes et algèbres normées. *algèbre fondamentale, algèbre linéaire, réduction, topologie, espaces euclidiens, suites et séries de fonctions*	320	327
Mathématiques B	Polynômes et matrices à coefficients séries entières. *espaces vectoriels normés, séries entières, polynômes, algèbre linéaire, réduction, suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, espaces euclidiens*	353	360
Informatique commune	Gestion de versions de grands textes. *programmation Python, dictionnaires, programmation dynamique, graphes, algorithme de Dijkstra, algorithme* A*	391	406

Formulaires

Développements limités usuels en 0	425
Développements en série entière usuels	426
Dérivées usuelles	427
Primitives usuelles	428
Trigonométrie	430

SESSION 2023 **MP8M**

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières MP et MPI

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Christophe Fiszka (professeur en CPGE), Simon Billouet (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet est composé de trois exercices communs aux filières MP et MPI, un exercice spécifique MP et un exercice spécifique MPI. Ces cinq exercices sont corrigés. Tous sont indépendants. Beaucoup commencent par des questions de cours dont les résultats sont réutilisés dans la suite.

- L'exercice 1 est consacré aux polynômes. Les questions de cours rappellent des résultats classiques, comme la formule de Taylor et la division euclidienne pour les polynômes. On étudie ensuite un endomorphisme défini sur les polynômes de degré inférieur ou égal à n, en particulier sa diagonalisabilité.
- Les questions de cours de l'exercice 2 rappellent des résultats simples sur la fonction exponentielle (formule de calcul des fonctions puissance, développement en série entière) et sur la fonction Gamma d'Euler. On étudie ensuite une fonction définie par une intégrale à paramètre, jusqu'à l'exprimer sous la forme d'une série de fonctions.
- Le troisième exercice est le seul qui ne propose pas de question de cours ; c'est également le plus long. Il traite d'algèbre linéaire dans le cadre original de la dimension infinie, en se plaçant dans l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Le quatrième exercice, filière MP, a pour thème les probabilités, ici encore dans un cadre insolite, en étudiant des variables aléatoires liées à des matrices et à leurs caractéristiques (trace, rang, déterminant). Les questions de cours permettent de se remettre en tête les propriétés classiques des projections vectorielles.
- L'autre quatrième exercice, filière MPI, combine suites et probabilités. Il se révèle moins original et plus facile que l'exercice spécifique MP, hormis sa dernière question qui est longue et technique.

Ce sujet comporte beaucoup de questions. Il permet de s'assurer de la bonne connaissance de son cours, souvent réinvesti de manière originale. Toutefois, cette originalité pouvait être déroutante et les étudiants préparant le concours e3a ne doivent pas s'étonner d'éprouver quelques difficultés. En outre, les exercices 1 et 2 sont de complexité croissante, et leurs fins (à partir des questions I.6 et II.6.2 respectivement) sont techniquement ardues.

SESSION 2023 **MP1M1**

NOTE DE L'ÉDITEUR

Le sujet était commun aux filières MP et MPI

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

CCINP Maths 1 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Faugère (ENS de Lyon) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème, indépendants les uns des autres. Une partie importante du problème est dédiée aux intégrales généralisées : en particulier, on établit des résultats sur la fonction gamma d'Euler.

- Pour la filière MP, le premier exercice, d'informatique commune, étudie certaines propriétés des graphes (orientation, connectivité) à partir de leur matrice d'adjacence, et fait notamment le lien entre dénombrement des chemins de longueur p d'un graphe et puissances p-ième de sa matrice d'adjacence. Il comporte également une partie sur les bases de données utilisant le langage SQL.
- Pour la filière MPI, le premier exercice se propose de démontrer une formule explicite pour la norme d'opérateur (aussi appelée norme triple) d'une matrice en fonction de ses coefficients. Il est très classique et il est bon de l'avoir fait au moins une fois avant les concours.
- Le second exercice porte sur l'étude des points critiques et des extrema locaux d'une fonction de deux variables.
- Le problème propose une démonstration de la *formule des compléments* :

$$\forall \alpha \in]\,0\,;1\,[\qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

  dont on peut en particulier déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

Notons que le sujet fait intervenir un grand nombre de techniques d'analyse du programme de seconde année, telles que l'étude d'une convergence uniforme, les calculs de série, la détermination d'un équivalent pour une intégrale à paramètre, le critère d'unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour établir une identité entre deux fonctions, ou encore l'étude spectrale de la matrice hessienne d'une fonction pour l'étude de ses extrema locaux. Il constitue un bon entraînement pour acquérir une rédaction efficace lors de l'utilisation des théorèmes de convergence dominée, de continuité et de dérivation d'une intégrale à paramètre.

SESSION 2023 **MP3M2**

NOTE DE L'ÉDITEUR

Le sujet était commun aux filières MP et MPI

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

CCINP Maths 2 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Jean (ENS de Lyon) ; il a été relu par Hicham Assakaf (ENS Paris-Saclay) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Le sujet se compose de deux courts exercices indépendants, suivis d'un problème en deux parties.

- Le premier exercice teste les acquis sur les espaces euclidiens. Il consiste en une application classique, en dimension finie, du théorème de projection orthogonale. Plus précisément, on y définit, par une intégrale, un produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2 puis on calcule la distance du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.
- Le second exercice consiste à calculer la loi du maximum de deux variables aléatoires géométriques indépendantes et de même paramètre.
- Le problème traite un résultat classique de réduction. Il s'agit de décomposer un endomorphisme diagonalisable u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel en une combinaison linéaire de « projecteurs spectraux » exprimables sous la forme de polynômes en u. Cette décomposition rend plus facile le calcul des itérés de u.
  - La première partie démontre le résultat après un bref retour sur le lemme de décomposition des noyaux.
  - La seconde partie justifie l'intérêt de la méthode en l'appliquant à une matrice 4×4, puis conclut sur l'étude d'une réciproque partielle.

L'énoncé reproduit la structure traditionnelle d'un sujet de mathématiques au concours CCINP : deux exercices simples, uniquement destinés à tester les connaissances des candidats sur les points élémentaires du programme de MP, suivis d'un problème permettant tout juste d'en franchir la limite. Le problème offre une excellente occasion de vérifier sa maîtrise du programme d'algèbre linéaire. Sa résolution n'est pas très éloignée du programme, et demande des arguments classiques. De la sorte, il permet aussi de se préparer à des problèmes d'algèbre linéaire d'un niveau un peu plus relevé.

SESSION 2023 **MP7IN**

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

INFORMATIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties indépendantes.

CCINP Informatique optionnelle MP 2023
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émile Hazard (professeur agrégé) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Les trois parties de ce sujet sont largement indépendantes. Les deux premières contiennent une large part d'algorithmique et de programmation dans les deux langages au programme : OCaml et Python. La troisième partie ne comporte aucune question de code.

- Dans la partie I, on implémente en OCaml un algorithme permettant de trouver le $(k+1)$-ième plus petit élément dans une liste, en temps linéaire dans le pire cas. On utilise pour cela une méthode « diviser pour régner » en choisissant un pivot pour séparer une liste en deux sous-listes. On exploite ensuite une relation de récurrence pour obtenir la complexité de cet algorithme dans le pire cas.
- La partie II introduit un problème général sur les graphes et propose un algorithme pour le résoudre partiellement. Il s'agit de chercher dans un graphe orienté une clique de célébrités, c'est-à-dire un ensemble de sommets ayant des arêtes entrantes depuis tous les sommets, mais des arêtes sortantes vers eux uniquement. Un algorithme de résolution partielle est étudié puis implémenté en manipulant les graphes par listes d'adjacence en Python.
- Enfin, la partie III porte sur une famille d'automates ayant des liens avec l'arithmétique. L'accent est mis ici sur la capacité des automates à être utilisés comme compteurs, en généralisant les automates de comptage modulo p (automates cycliques à p états). Une description des langages reconnus par ces automates est obtenue dans un premier temps, puis exploitée en faisant abstraction des automates sous-jacents. Des calculs faisant intervenir des cardinaux d'ensembles apparaissent également dans cette partie.

Ce sujet est moins long que ceux des années précédentes. Sa difficulté est globalement constante du début à la fin de l'énoncé. Il ne fallait donc pas hésiter à le parcourir en entier avant de commencer. De plus, comme souvent, il était préférable de sauter les questions bloquantes afin de ne pas y perdre trop de temps, quitte à y revenir plus tard.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2023

Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.

Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.

— Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).

— Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.

— Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— Pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.

— D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D(p) = Dp = p'$.

— Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A – Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X + a)$.

Q 1. Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B – À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3. Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C – À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} p'(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Centrale Maths 1 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Nawzad Hogan (ENS de Lyon) et William Aufort (professeur en CPGE).

Le problème porte sur le calcul ombral, domaine de l'analyse combinatoire qui s'intéresse aux propriétés de certaines suites de polynômes.

- Dans la partie I, on étudie trois endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ qui seront utilisés dans les parties suivantes. Les questions, relativement classiques, exigent des réponses précises et demandent de s'habituer aux notations du problème. Il ne s'agit néanmoins que d'une introduction : elle doit être menée rapidement.
- La partie suivante introduit les endomorphismes T de $\mathbb{K}[X]$ dits *shift-invariants*

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad \forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad T(P)(X+a) = T(P(X+a))$$

  et en particulier les endomorphismes *delta* de $\mathbb{K}[X]$ (vérifiant $TX \in \mathbb{K}^*$). On étudie certaines de leurs propriétés. On fait apparaître la formule de Taylor polynomiale comme exemple de développement d'un endomorphisme shift-invariant en série d'itérés de l'endomorphisme de dérivation.
- La partie III présente la suite de polynômes associée à un endomorphisme delta et vérifie que ce sont les polynômes qui satisfont la formule de convolution

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{K}^2 \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y)$$

  Le développement d'un endomorphisme shift-invariant comme série d'itérés de n'importe quel endomorphisme delta est également démontré et la formule de dérivation polynomiale est proposée en application.
- La dernière partie introduit la dérivation de Pincherle d'un endomorphisme, puis des opérateurs ombraux afin d'établir de nouvelles formules reliant un endomorphisme delta à la suite de polynômes associée.

Les connaissances du cours mises en œuvre dans ce problème sont assez peu nombreuses, elles se concentrent autour des opérations de l'algèbre des polynômes et de la définition d'une application linéaire dans une base. La difficulté du sujet tient à sa longueur, au nombre important d'objets mathématiques définis, aux multiples résultats à réutiliser entre les parties souvent sans indication, et à la progression arborescente des questions et des résultats, dans laquelle on peut s'égarer et perdre du temps. Il exige de savoir trouver des arguments efficaces et précis et d'être capable de réutiliser plusieurs résultats à la fois pour avancer le plus vite. Il est représentatif des sujets proposés ces dernières années à Centrale-Supélec et constitue un bon entraînement pour les candidats souhaitant se préparer spécifiquement à ce concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2023

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

— Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

— Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = O(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall m \geqslant m_0, \quad u_m = M_m v_m.$$

— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.A.1)

Q 1. Montrer que

$$I_n \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim K_n.$$

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Centrale Maths 2 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à la fonction de Gauss, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

On s'intéresse notamment à certaines utilisations de cette fonction en probabilités. Ce sujet constitue ainsi une introduction guidée aux lois de probabilités à densité, qui ne figurent pas au programme de MP mais qui sont enseignées en école d'ingénieurs.

- La partie I est constituée de deux groupes de questions indépendants. Dans le premier (sous-parties I.A et I.B), on calcule l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction de Gauss, puis un équivalent de son reste. Le second (sous-partie I.C) porte sur la démonstration d'une inégalité probabiliste qui sera utilisée dans la partie III.
- Dans la partie II, on étudie une suite de fonctions en escalier, dont on prouve qu'elle converge uniformément vers la fonction φ.
- Enfin, dans la partie III, on utilise cette approximation de φ pour démontrer le théorème central limite, propriété fondamentale de la théorie des probabilités, dans un cas particulier. Ce résultat est enfin utilisé pour une deuxième application.

Ce sujet est plutôt court et les premières questions sont très classiques. Néanmoins, les difficultés surgissent rapidement. Plusieurs questions exigent une bonne maîtrise des calculs, d'autres nécessitent un certain recul sur le sujet pour appliquer judicieusement les résultats prouvés précédemment.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Option informatique

MP

4 heures Calculatrice autorisée

2023

Ce sujet comporte quatre parties.

La partie I est totalement indépendante des suivantes et étudie des transformations sur des langages.

Les autres parties s'intéressent à des structures de données représentant des ensembles d'entiers naturels E contenus dans $[\![0, N-1]\!]$, « denses » au sens où $|E|$ est du même ordre de grandeur que N. On cherche à optimiser le temps d'exécution des opérations de test d'appartenance, d'insertion ou de suppression d'un élément, de calcul du minimum, de calcul de l'élément de E immédiatement supérieur à x (qu'on appellera successeur de x dans E, même si x n'appartient pas à E) ou d'opérations ensemblistes telles que l'union.

Dans la partie II, on étudie des structures ordinaires dont on identifie le défaut. Dans la partie III, on étudie une structure simple d'arbre complet modélisant des parties de $[\![0, 2^p - 1]\!]$ et dans la partie IV, on implémente des arbres de van Emde Boas qui, sur des parties E de $[\![0, 2^{2^p} - 1]\!]$, donnent des opérations en temps quasi-constant.

I Langages et automates

Dans cette partie, on s'intéresse à des transformations sur des langages définis sur un alphabet à deux lettres $X = \{a, b\}$. On note $L_1|L_2$ la réunion de deux langages L_1 et L_2 et ε le mot vide (ou le langage réduit au mot vide, suivant le contexte). Les automates considérés sont des quadruplets (Q, I, F, Δ) où Q est l'ensemble des états de l'automate, I l'ensemble de ses états initiaux, F l'ensemble de ses états finals et $\Delta \subset Q \times X \times Q$ l'ensemble de ses transitions.

Soit L et K deux langages. On définit le langage noté $L \rhd K$ par

$$L \rhd K = \left\{ uvw \;\middle|\; (u, v, w) \in (X^*)^3, uw \in K, v \in L \right\}$$

Q 1. Déterminer les langages suivants :

$$a^* \rhd b^* \qquad (ba)^* \rhd (ab)^* \qquad a^* \rhd \left\{ a^p b a^q \;\middle|\; (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \leqslant q \right\}$$

Q 2. Soit L, K_1 et K_2 trois langages. Exprimer à l'aide de $L \rhd K_1$, $L \rhd K_2$, K_1 et K_2 les langages suivants :

$$L \rhd (K_1|K_2) \qquad L \rhd (K_1.K_2) \qquad L \rhd (K_1^*)$$

On ne justifiera que la formule portant sur l'étoile de Kleene.

Q 3. Montrer que si L et K sont deux langages réguliers, $L \rhd K$ est régulier.

Q 4. Donner l'exemple d'un langage régulier L et d'un langage non régulier K tel que $L \rhd K$ soit régulier. On justifiera en détail que le langage K proposé n'est pas régulier.

Q 5. À l'aide d'automates reconnaissant des langages réguliers L et K et d'ε-transitions, construire un automate à ε-transitions reconnaissant $L \rhd K$. On expliquera la construction puis on formalisera l'automate correspondant. Il est inutile de justifier qu'il convient.

On définit sur X^* l'application σ par :

$$\begin{cases} \sigma(\varepsilon) = \varepsilon \\ \forall u \in X^*,\ \forall x \in X, \quad \sigma(ux) = xu \end{cases}$$

On note alors pour tout langage L, $\widehat{L}$ le langage défini par :

$$\widehat{L} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \sigma^k(L)$$

Q 6. Pour chacun des langages L suivants, déterminer $\sigma(L)$ puis $\widehat{L}$:

$$L_1 = (ab)^* \qquad L_2 = a^*(ba|b)$$

Q 7. Soit L un langage régulier et $\mathcal{A} = (Q, I, F, \Delta)$ un automate le reconnaissant. Pour $(q, q') \in Q^2$, on note $L_{q,q'}$ l'ensemble des mots qui étiquettent un chemin de l'état q à l'état q' dans $\mathcal{A}$. Exprimer $\sigma(L)$ à l'aide de langages $L_{q,q'}$ et du langage X. On portera une attention particulière au cas du mot vide et on justifiera la formule proposée.

Centrale Informatique optionnelle MP 2023
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Malory Marin (ENS de Lyon) ; il a été relu par Émile Hazard (professeur agrégé) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet aborde deux thèmes : les langages réguliers et les structures de données permettant de représenter les ensembles d'entiers naturels. La première partie est complètement indépendante du reste du sujet.

- Dans la partie I, on s'intéresse à deux opérateurs sur des langages.
  - La première opération consiste, à partir de deux langages L et K, à définir l'ensemble $L \triangleright K$ des mots obtenus en insérant un mot de L à l'intérieur d'un mot de K.
  - La deuxième opération est cette fois définie pour un unique langage L et consiste à lui associer l'ensemble $\widehat{L}$ des mots obtenus par permutation circulaire des lettres des mots de L.

  Dans les deux cas, après l'étude de chaque opérateur sur quelques exemples, le sujet s'intéresse à la stabilité de l'ensemble des langages rationnels par chacun de ces opérateurs. Deux méthodes sont utilisées pour le premier opérateur : l'une basée sur la structure inductive des langages réguliers, l'autre sur les automates non déterministes.
- Dans la partie II, des structures de données classiques permettant de représenter les ensembles sont étudiées et implémentées en OCaml. Ces structures sont les listes triées, les tableaux triés ainsi que les arbres binaires de recherche. Cette partie nécessite de bien maîtriser la programmation impérative et récursive en OCaml, et ne présente pas de difficulté majeure.
- Dans la partie III, une structure de données utilisant les arbres binaires complets est présentée. Elle est similaire aux tas binaires au programme de l'option informatique, qui permettent d'implémenter une file de priorité. Cependant, dans la structure en arbre, les entiers sont uniquement stockés dans les feuilles, et l'ajout d'une étiquette booléenne à chaque nœud permet d'améliorer la complexité de certaines opérations. Le sujet propose notamment d'implémenter la création d'un tel arbre, l'insertion et la suppression d'un entier, ainsi que la recherche d'un successeur.
- Dans la partie IV, le sujet propose une implémentation via un type mutable des arbres de van Emde Boas. On implémente les mêmes opérations que dans la partie précédente. La difficulté vient ici de la complexité de la structure, qui permet cependant d'améliorer encore la vitesse de certaines opérations.

Ce sujet est très long, avec une première partie d'un niveau technique très élevé, qui nécessite du recul sur les langages réguliers. Les parties suivantes sont de difficulté variable. La partie programmation nécessite beaucoup de programmation impérative, ce qui peut être pénible en OCaml. Les questions de complexité amenées par les structures de données étudiées sont instructives et diverses.

A2023 – MATH I MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières MP et MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Mines Maths 1 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) ; il a été relu par Pierre Faugère (ENS de Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet propose de démontrer un joli résultat de systèmes dynamiques : le théorème de Lyapounov. Ce dernier donne une condition de stabilité du système différentiel

$$\begin{cases} y' = \varphi(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \varphi(0) = 0$$

à l'aide des valeurs propres complexes de la différentielle en 0 de φ. Ce théorème illustre parfaitement le principe de linéarisation.

Le sujet est composé de 3 parties de difficulté et de longueur inégales.

- La première partie, constituée de 3 questions, est proche du cours. On démontre quelques propriétés des normes subordonnées qui seront utiles pour la suite.
- La suivante est la plus longue avec 11 questions. Elle se concentre sur le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} y' = u(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

  D'après le cours, la solution s'exprime à l'aide de $\mathrm{e}^{\,u}$. On y montre, par des majorations de normes subordonnées, une condition de stabilité en 0 portant sur le spectre de u.
- La dernière partie, de loin la plus délicate, donne une démonstration du théorème de Lyapounov en faisant le lien entre le système différentiel et son système linéarisé.

Ce sujet de 3 heures est de difficulté progressive. Les deux premières parties peuvent constituer un sujet de révision de 2 heures sur la topologie des espaces vectoriels normés et les équations différentielles linéaires. La troisième partie, la plus intéressante mais aussi la plus complexe, est pratiquement indépendante des deux premières. Il faut avoir beaucoup de recul sur le calcul différentiel pour la traiter.

A2023 – MATH II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières MP et MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Mines Maths 2 MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hai Châu Nguyên (ENS de Lyon) ; il a été relu par Florian Metzger (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet étudie les propriétés de la fonction f définie pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$$

qui généralise les célèbres intégrales de Wallis définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$$

- La partie 1 se propose de calculer la somme de la série $\sum 1/k^2$ à l'aide du noyau de Dirichlet défini pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

- La partie 2 établit une équation fonctionnelle vérifiée par f et s'intéresse aux propriétés générales de la fonction f ainsi qu'à ses propriétés asymptotiques au bord de son domaine de définition.
- Après avoir calculé les intégrales donnant $f'(0)$ et $f'(1)$, la partie 3 établit le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$ à partir d'une estimation de la suite d'intégrales de terme général

$$\mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln(\sin t)\big)^n \,\mathrm{d}t$$

- La partie 4 a pour but le calcul de $f''(0)$ en utilisant des séries trigonométriques et des intégrales.
- Dans la partie 5, on montre que f est la seule application ln-convexe de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant à la fois $f(0) = \pi/2$ et l'équation fonctionnelle obtenue dans la partie 2.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes les unes des autres. Le sujet est très technique et demande une aisance certaine dans les calculs. Plusieurs questions calculatoires de la première partie sont accessibles dès la première année de CPGE. À plusieurs reprises, l'énoncé teste la rigueur dans l'application des grands théorèmes du cours, ce qui implique d'en vérifier soigneusement les hypothèses.

A2023 – INFO

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

INFORMATIQUE COMMUNE

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Cette épreuve traite de typographie, c'est-à-dire de la façon de former des caractères et de les agencer pour former un texte lisible. Elle utilise des termes techniques précis comme « glyphe », « œil » ou « chasse » et aborde plusieurs problèmes liés à cette thématique, du traitement individuel des caractères à l'agencement global des mots dans les textes justifiés.

- La partie I, très courte et essentiellement descriptive, permet de comprendre comment sont définis les glyphes (représentations graphiques des caractères) qui seront manipulés dans la suite du sujet.
- La partie II, très courte elle aussi, est constituée de trois questions sur les bases de données dont le but est de sélectionner des polices et des caractères.
- Dans la partie III, on écrit des fonctions en Python permettant de manipuler les descriptions vectorielles des glyphes.
- La partie IV introduit une bibliothèque Python de traitement d'image et aborde le problème du tracé des lignes sur une image pixelisée. Il est notamment demandé d'expliquer, sur un exemple, un code donné dans l'énoncé.
- La partie V poursuit le travail de la partie précédente en guidant l'écriture du code nécessaire à l'affichage complet des caractères et des mots au sein d'une image.
- Enfin, la dernière partie aborde un sujet différent, celui de l'agencement des mots et des espaces permettant d'obtenir un texte justifié sur plusieurs lignes. Bien que les codes correspondant aux algorithmes les plus complexes soient fournis, elle est plus difficile et fait intervenir des notions d'algorithmique : principe des algorithmes gloutons, programmation dynamique, mémoïsation, calcul de complexité.

En dépit d'une quantité importante de mots et de concepts initialement inconnus de la majorité des candidats, ce sujet est suffisamment progressif pour être accessible à tout élève motivé. Il balaye de façon efficace une grande partie du programme des deux années. Les élèves de sup pourront néanmoins s'entraîner en laissant de côté les parties II et VI. Enfin, il est appréciable qu'un sujet dise aux futurs ingénieurs, chercheurs ou professeurs que la beauté compte dans leurs futurs métiers. C'est pourquoi la très grande majorité des documents scientifiques sont produits à l'aide de logiciels qui accordent une grande importance à la typographie, ce qui n'est pas le cas de logiciels plus classiques... Chez H&K, nous mettons un point d'honneur à ce que nos livres soient agréables à lire, et toutes nos publications utilisent bien sûr LaTeX dans les règles de l'art !

A2023 – INFO MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE MP

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve concerne uniquement les candidats de la filière MP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 11 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Mines Informatique optionnelle MP 2023
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Malory Marin (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Cette épreuve travaille à résoudre efficacement le jeu du hanjie, qui consiste à noircir les cases d'une grille en respectant les indications données pour chaque ligne et chaque colonne.

- Dans la partie I, on fait l'étude d'une grille de hanjie miniature à l'aide de la logique propositionnelle. On détermine des formules logiques pour les lignes et les colonnes de la grille et on en déduit, via l'utilisation d'arbres de preuve, des propriétés logiques de la grille.
- Dans la partie II, on met en place des types et fonctions basiques permettant de manipuler en OCaml une grille de hanjie et les indications associées. On commence par définir le type `couleur`, qui décrit l'état de chaque case de la grille. Puis on définit le type `presolution`, qui correspond à l'état d'une grille partiellement complétée. L'énoncé demande alors d'écrire un accesseur et un transformateur pour le type `presolution`. On s'intéresse ensuite aux rangées de la présolution et à leur adéquation avec les indications données. Enfin, on recherche des solutions via une stratégie de retour sur trace : on tente de donner une couleur à une case et on regarde si cela mène à une solution admissible, sinon on revient sur nos pas pour tester les autres possibilités.
- Dans la partie III, on utilise les langages et automates afin de parvenir à un algorithme moins naïf qu'à la partie précédente. Pour cela, le sujet fait construire un automate qui, pour une rangée de la présolution, filtre les mots qui étendent la rangée et incluent toutes les déductions possibles à partir de l'indication de cette rangée. On écrit alors deux fonctions, `accessible` et `coaccessible`, qui permettent d'émonder cet automate. On écrit ensuite une fonction `projete` qui étend une rangée de la présolution en se servant de la propriété de cet automate. Le sujet s'achève par l'écriture d'une fonction résolvant efficacement le hanjie. On calcule également, au fil du sujet, les complexités des diverses fonctions écrites et on les compare à une approche naïve du calcul d'extension.

Ce sujet aborde des thématiques variées de manière très complète. La partie I constitue un bon exercice de révision sur la logique propositionnelle. La partie II permet de s'entraîner à l'algorithmique et est de difficulté progressive : on commence par l'écriture de fonctions très simples, de seulement quelques lignes, puis on progresse jusqu'à écrire des fonctions assez longues. Les deux premières parties de cette épreuve sont donc à conseiller si vous cherchez des exercices de révision assez complets en logique propositionnelle et en algorithmique. La partie III comporte plusieurs questions sur les automates (17, 18, 19 et 20) qui sont de bonnes révisions, mais aussi des questions beaucoup plus longues et difficiles, de dénombrement, d'algorithmique et de calcul de complexité. Ainsi, la partie mathématique et algorithmique de la partie III est à conseiller si vous cherchez à vous frotter à des questions techniques de grande difficulté.

ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

LUNDI 17 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XLSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths A MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sélim Cornet (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet traite de l'ensemble des quaternions, qui est une sorte d'extension du corps des nombres complexes, et des algèbres normées. Il se compose de quatre parties permettant de démontrer trois théorèmes majeurs.

- Dans la partie I, on étudie des propriétés générales de l'ensemble des quaternions $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ où

$$\mathrm{E} = \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

  vérifient $\mathrm{I}^2 = \mathrm{J}^2 = \mathrm{K}^2 = -\mathrm{E}$ et $\mathrm{IJ} = -\mathrm{JI} = \mathrm{K}$, $\mathrm{JK} = -\mathrm{KJ} = \mathrm{I}$ et $\mathrm{KI} = -\mathrm{IK} = \mathrm{J}$. On étudie particulièrement les quaternions purs $\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ et l'on munit $\mathbb{H}$ d'une norme euclidienne définie par

$$\mathrm{N}(x\mathrm{E} + y\mathrm{I} + z\mathrm{J} + t\mathrm{K}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \text{ pour tous réels } x, y, z, t$$

  Cette norme fournit une isométrie de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{H}$, ce qui permet de faire de la géométrie euclidienne dans $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
- Dans la partie II, on étudie les automorphismes de $\mathbb{H}$, dont on montre qu'ils sont intérieurs c'est-à-dire que ce sont exactement les $h \mapsto u\,h\,u^{-1}$ où $\mathrm{N}(u) = 1$.
- Dans la partie III, indépendante des deux premières, on montre qu'une norme sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geqslant 4$ pour tous vecteurs normés x, y découle d'un produit scalaire. On utilise pour cela des techniques matricielles et topologiques assez originales. C'est un cas particulier dans $\mathbb{R}^2$ du résultat selon lequel une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- La dernière partie est consacrée aux algèbres valuées. On montre tout d'abord qu'une algèbre intègre associative unifère A et dans laquelle tout élément admet un polynôme annulateur non nul est isomorphe (en tant qu'algèbre) à l'un des ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Puis on prouve une version plus forte dans un théorème attribué au mathématicien Adolf Hurwitz (1859-1919) disant que le théorème reste vrai si A est munie d'une norme (pour l'espace vectoriel qu'est A) qui est en plus multiplicative c'est-à-dire que $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{A}^2$. Le théorème originel suppose que la norme est euclidienne, hypothèse qui n'est pas faite dans ce sujet.

Les principaux thèmes abordés sont l'algèbre générale et linéaire, le calcul matriciel, les espaces euclidiens et la topologie dans les espaces vectoriels normés. Le sujet est long et globalement difficile. Plusieurs questions sont très abordables et on retrouve des thématiques revenant régulièrement aux concours (quaternions, groupe orthogonal, isométries d'un espace de dimension 3), mais d'autres questions demandent un grand recul et beaucoup d'idées, notamment dans les parties III et IV. De malheureux conflits de notation se glissent également dans l'énoncé. Il était peu vraisemblable de pouvoir le traiter intégralement dans le temps imparti.

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2023

MARDI 18 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE MP-MPI - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X Maths B MP-MPI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) ; il a été relu par Pierre Bosch (professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Le sujet traite de polynômes et de matrices dont les coefficients sont des séries entières à coefficients réels. On manipule ainsi des polynômes $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} f_i \mathrm{X}^i$ où :

$$\exists \rho > 0 \quad \forall i \in [\![0 ; n]\!] \quad \exists (a_{i,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall t \in]-\rho ; \rho[\qquad f_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k} t^k$$

- Dans la première partie, on établit divers résultats de manipulation de séries entières qui seront exploités plus tard : sommes, produits, introduction d'une famille de normes sous-multiplicatives adaptées, convergence de séries de séries entières, inverse. On s'initie aux manipulations des polynômes et des matrices à coefficients séries entières dans les deux premières questions.
- On démontre ensuite un théorème de factorisation de polynômes à coefficients séries entières. Si P est un polynôme unitaire dont les coefficients sont des séries entières, et $\lambda \in \mathbb{R}$ une racine de $\mathrm{P}_{|t=0} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de multiplicité d, alors il existe F et G deux polynômes unitaires à coefficients séries entières vérifiant $\mathrm{F}_{|t=0} = (\mathrm{X} - \lambda)^d$ et $\mathrm{P} = \mathrm{FG}$ où l'on note
$$\mathrm{F}_{|t=0} = f_0(0) + f_1(0)\mathrm{X} + \cdots + f_n(0)\mathrm{X}^n$$
- La troisième partie étend le théorème spectral aux matrices à coefficients variables : si M est une matrice symétrique à coefficients séries entières, il existe P matrice orthogonale à coefficients séries entières telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est diagonale.

De tels objets (matrices et polynômes à coefficients séries entières) n'ayant probablement jamais été rencontrés lors des années de prépa, le problème requiert un temps important pour apprivoiser ces notions, et s'avérera donc très difficile pour beaucoup d'étudiants. Il nécessite une maîtrise approfondie du programme, y compris des détails fins des démonstrations de cours sur les points suivants : espaces vectoriels normés, séries entières, polynômes et algèbre linéaire élémentaire.

De surcroît, l'énoncé n'adopte pas un choix de notations très heureux : les indices n et i sont chacun utilisés dans des contextes différents, mais que l'on doit combiner dans certaines questions !

En contrepartie, une fois l'appréhension conceptuelle dépassée, les résultats prouvés sont intéressants : ils généralisent des résultats importants du cours, tels que la division euclidienne de polynômes, la factorisation de polynômes, ainsi que le théorème spectral.

Le sujet n'est donc à recommander qu'aux candidats d'un bon niveau et ayant du recul sur les points du programme énumérés ci-dessus.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

JEUDI 20 AVRIL 2023
16h30 - 18h30

FILIERES MP-PC-PSI
Epreuve n° 8
INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet s'intéresse à la gestion de version de longs textes, dont la principale application concerne les codes informatiques. Certains logiciels, comme Git, utilisent des algorithmes permettant à plusieurs développeurs de travailler sur un même programme, puis de fusionner leurs versions si elles ne sont pas en conflit, ou encore de conserver un historique des différentes modifications effectuées. L'idée consiste à ne pas stocker les différentes versions complètes (elles sont en général très volumineuses), mais seulement les différences entre deux versions dans un *différentiel*. La donnée d'une version et d'un différentiel permet de reconstruire le texte modifié.

- La partie I introduit les principales notions et structures de données qui seront utilisées et adaptées dans la suite : tranche, différentiel et texte versionné. Un premier algorithme de calcul de différentiel est implémenté dans le cas simple où les modifications à effectuer concernent des portions de longueurs égales dans les deux textes.
- La partie II s'affranchit de cette hypothèse et adapte les structures de données précédemment mises en place. Un lien est alors établi avec le calcul de la distance d'édition entre deux textes, un grand classique de la programmation dynamique, dont une résolution est proposée. La détection de conflits entre deux différentiels et un algorithme de fusion de modifications sont également implémentés.
- Enfin, la partie III modélise le calcul d'une distance d'édition sous la forme de la recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré associé aux deux textes à comparer. Les algorithmes au programme de prépa pour résoudre ce problème, à savoir l'algorithme de Dijkstra et l'algorithme A*, sont alors étudiés dans ce cadre, notamment du point de vue de la complexité temporelle.

Comme depuis plusieurs années à l'X, il s'agit d'un sujet exclusivement d'algorithmique, très bien écrit et détaillé. Il est de plus d'une longueur raisonnable, même s'il comporte quelques questions de programmation plus techniques. Au-delà des capacités de programmation et d'assimilation de nouvelles structures de données, ce sujet évaluait les connaissances et la compréhension des candidats sur le paradigme de programmation dynamique et sur les algorithmes de graphes, qui sont deux nouveaux chapitres au programme de prépa. Cela en fait un bon sujet pour retravailler ces deux thèmes.